

電位の簡単な入門 2007

No.2

——静電氣的ポテンシャルエネルギーのお話し2——

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

1. まえがき

前回——第1回——では保存力、ポテンシャルエネルギーおよび力学的エネルギー保存の法則——付録では系のエネルギー保存則、熱力学の第1法則、特殊相対性理論のエネルギーおよび量子論のエネルギー——を説明した。第2回では、静電氣的ポテンシャルエネルギーを説明する。2章ではクーロンの法則を説明する。2章では、電氣量の保存に触れている。電氣量の保存は質量の保存とともに、古典物理学では重要な保存則として扱われる。これらの保存則がエネルギーの保存に関連があることは第1回の付録での孤立系のエネルギーの保存およびアインシュタインの特殊相対性理論のエネルギーで説明をした。3章でクーロンの法則を使用して静電氣的ポテンシャルエネルギーを記述する。そして、エネルギー原理を使用して静電氣的ポテンシャルエネルギーおよび外力の考察をする。この考察では、2007年現在までの日本国内での電位の定義を理解するうえで関係があるものを選んでる。3章で説明する静電氣的ポテンシャルエネルギーを使用して次回——第3回——で電位の定義を与える。本書のOptionでは、第2回のエネルギー原理での考察における考え方を使用して著者の電位の定義に対する意見を論じる。さらに、3章では前回に説明した力学的エネルギー保存の法則を使用して考察する。静電氣的ポテンシャルエネルギーを使用して4章で系の静電氣的ポテンシャルエネルギーについて説明する。静電氣的ポテンシャルエネルギーは系の相互作用として解釈するものであるので、4章は本書では重要な部分である。第2回では系のエネルギー保存則をなるべく使用しないようにするが、4章では系のエネルギー保存則を簡略にして使用する。本書の第5回で回路方程式を記述するがその際に系のエネルギー保存則を使用する。

付録iでは電氣量の不連続について説明した。このことは、電磁気学、量子論、量子力学および素粒子物理学などでも使用する知識である。付録iiでは国際単位系での真空中の誘電率および真空中の光の速さについて説明をした。付録iiiでは誘電率が負の値になる場合を含めて考察した。誘電率が負の値になることは1990年代の日本の大学課程での一般的な電磁気学および回路論では説明をしていないものと著者は記憶する。負の誘電率に関連する工学は、特に2008年現在での最近の研究で報告されている工学のようである。本書は工学の電気の回路論であるので、そのような背景を著者が感じて加えた付録である。付録ivでは、ポテンシャルエネルギーと仕事の関係について説明をした。付録ivの内容は、本書の3回からOptionではたびたび使用することもできる。しかし、第3回以降の本文を理解する上では必須事項としては扱っていない。付録vではボーアの水素原子モデルについて説明をした。本書の第2回、第3回および第4回の付録でボーアの水素原子モデルについて説明をする。付録vでは、量子論の基礎的な知識に触れて、不連続なエネルギーについての計算を紹介している。さらに、物理学での実績のあるボーアの水素原子モデルを使用して、モデルを使用する際の考え方について知る機会になるもこともねらって加えた付録である。この後者のねらいは著者の専攻が循環系の回路モデルであることにも関係があるので、ボーアの水素原子モデルを使用してモデルについての説明をした。モデルに対する考え方が多少なりとも示すことはできたものと著者は考えている。

本書の第2回は全体としては文献1を参考にして作成している。エネルギー原理および力学的エネルギー保存の法則については文献2も参考にしている。また、質点系の運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーにつ

いても文献2を参考にしている。国際単位系については文献3，文献4および文献5を参考にした。文献5のCODATAについては文献6に簡単な説明を与えている。特殊相対性理論については文献7および文献8を参考にしている。

文献9および文献10は、第2回の付録vのボーア理論を作成する際に参考にした文献である。付録vのボーア理論は、ほとんど文献1および文献9に学んで作成している。

本書は著者の専攻である循環系の回路モデルの参考文献として作成している。文献11～文献15は、著者が作成した循環系の回路モデルの無償の文献である。文献11および文献12は著者の循環系の回路モデルの論文である。著者の循環系の回路モデル理論では、電位を心臓および血管内に作用している内圧に対応させた関係を与えている。このことから、本書の静電的ポテンシャルエネルギーは電位を定義する際に使用するので著書の循環系の回路モデル理論の内圧に関連のある知識である。圧力はニュートンの万有引力の法則に関係づけられて説明を与えられることがある。このニュートンの万有引力の法則にもポテンシャルエネルギーを定義できることは周知である。循環液の回路モデルでの著者の研究では、このような万有引力のポテンシャルエネルギーと静電的ポテンシャルエネルギーとの関係を考察することもある。文献13～文献15は初心者向けに著者が作成したものである。循環系の回路モデルの平易な文献として文献14が本書の第2回の本文と関係があるものである。文献16～文献20は本書——電位の簡単な入門2007のこと。——の他の回のPDF文書である。2008年現在、文献6および文献11～文献20は無償でダウンロード可能である。

本書では‘誤り’がないことを保証はしない。本書の校正の作業は今後も行う予定である。本書の‘誤り’が見つかった際には不定期に改訂を行い発行する予定である。

目次	
1. まえがき	1
目次	3
2. クーロンカ (Coulomb's Law)	4
3. 静電的ポテンシャルエネルギー (electrostatic potential energy)	6
4. 系を構成している点電荷の各相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギー	12
5. あとがき	15
付録	16
i. 電気素量 (elementary charge)	16
ii. 国際単位系での真空中の誘電率と真空中の光の速さ ³⁾ , ⁴⁾ , ⁵⁾ , ²⁰⁾	16
iii. 誘電率を考慮した計算	17
iv. 保存力の仕事とポテンシャルエネルギーの関係	18
v. ボーア理論 1 (Bohr Theory)	19
参考文献	32
免責事項	33
著作権	33

2. クーロンカ (Coulomb's Law)

本章では真空中の静電気について説明する。各点電荷が互いに静止している場合および各点電荷がとてもゆっくりと移動している場合を静電気の場合とする。

(2.1) および (2.2) を点電荷の電気量とする。SI——国際単位系の略称である。——での電気量の計算は本書の第5回——文献19のこと。——で与えた。SIでの電気量の単位Cはクーロンと呼ぶ。電気量はベクトル解析でのスカラーになる。正負の符号を使用して、電気量は区別する。これらの各点電荷が (2.3) あるいは (2.4) の場合は (2.1) および (2.2) の点電荷には互いに反発する力——斥力——が作用する。このような静電気力の斥力についての説明図を図 2.1 および図 2.2 で与えた。(2.5) あるいは (2.6) の場合は (2.1) および (2.2) の点電荷には互いに引き合う力——引力——が作用する。このような静電気力の引力についての説明図を図 2.3 および図 2.4 で与えた。これらの2つの点電荷の位置で決定する一直線上に、それらの点電荷に作用する静電気力は同じ大ききで互いに逆向きに作用する。

$$q > 0, q_1 > 0 \dots (2.1)$$

$$q_1 < 0, q_1 < 0 \dots (2.2)$$

$$q > 0, q_1 > 0 \dots (2.3)$$

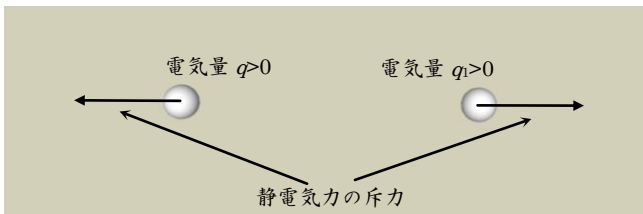


図 2.1 点電荷間の斥力 1

$$q < 0, q_1 < 0 \dots (2.4)$$

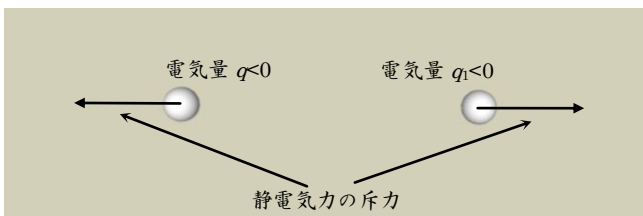


図 2.2 点電荷間の斥力 2

$$q < 0, q_1 > 0 \dots (2.5)$$

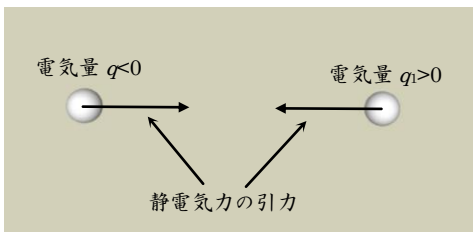


図 2.3 点電荷間の引力 2

$$q > 0, q_1 < 0 \dots (2.6)$$

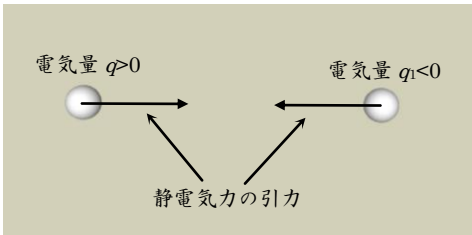


図 2.4 点電荷間の引力 1

一般的な解釈では電気量は保存している。このことは、電気量は造られる——創成する——ことなく、一方の物体から他方の物体へ移動するだけであることを意味する。この電気量の保存は素粒子物理学で、粒子の反応を説明するときに電子数保存を考えるのに使用できる。本書の第1回——文献16のこと。——の付録で説明をした孤立系での系のエネルギー保存則に電気量の保存は関連がある。電気の回路論では電流を説明する場合に使用する。付録iで電気量の量子化について説明した。電気量の保存での電流の説明は本書の第5回で与えた。

(2.7) はクーロンの法則と呼ばれる式である。(2.7) の分母 (2.8) は点電荷間——点電荷の中心の間——の距離である。(2.7) の分子の電気量は (2.1) および (2.2) のものである。(2.7) の係数である (2.9) の左辺は、SI を使用して導出することができる。(2.10) は誘電率——permittivity——である。誘電率 (2.10) は真空中の誘電率である。本書の本文では、誘電率を記述する場合はすべて (2.10) を使用する。SI での真空中の誘電率 (2.10) については付録iiで説明をしている。(2.7) で真空中の誘電率を使用しない場合を付録のiiiに説明している。真空中の誘電率 (2.10) の右辺に記述した (2.11) は真空中の光の速さである。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r^2} \text{ N} \dots (2.7) \text{ クーロンの法則}$$

$$r \text{ m} \dots (2.8)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \dots (2.9)$$

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \doteq 8.854 \ 187 \ 817 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \dots (2.10) \text{ 真空中の誘電率}$$

$$c = 299 \ 792 \ 458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \dots (2.11) \text{ 真空中の光の速さ}$$

クーロンの法則 (2.7) から上述での各点電荷に作用する静電気力について説明することができる。クーロンの法則 (2.7) で記述する電気力をクーロン力と呼ぶことがある。クーロン力は異なる2つの点電荷の相互作用で生じるものと考えることができる。クーロンの法則 (2.7) の各点電荷の電気量 (2.1) と (2.2) との積から (2.7) の右辺に符号が決定する。クーロンの法則 (2.7) の右辺の符号が正の場合は斥力になる。このようなクーロン力の斥力の場合を図 2.5 および図 2.6 に与えた。一方、クーロンの法則 (2.7) の符号が負の場合は引力になる。このようなクーロン力の引力の場合を図 2.7 および図 2.8 に与えた。力の大きさは、(2.12) で与えることができる。本書では、(2.1) および (2.2) の点電荷はクーロンの法則が成立するほど (2.8) よりも十分に小さいサイズの帯電体であるものとする。

$$|F| = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r^2} \right| \text{ N} \dots (2.12)$$

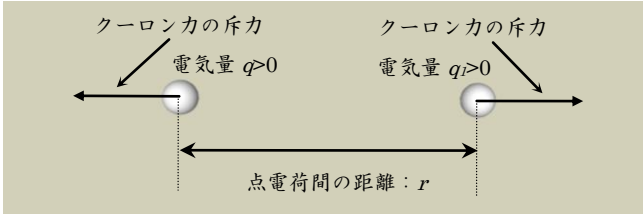


図 2.5 クーロン力の斥力 1

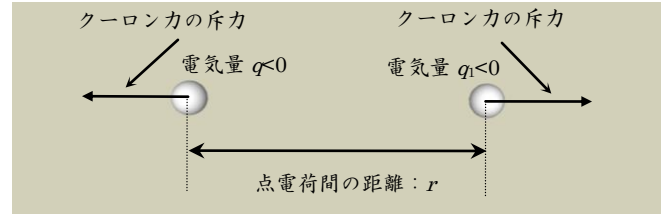


図 2.6 クーロン力の斥力 2

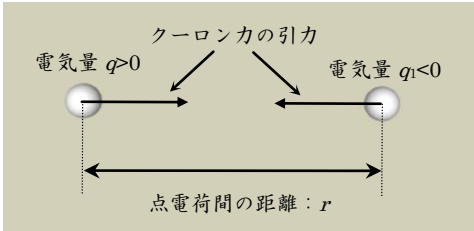


図 2.7 クーロン力の引力 1

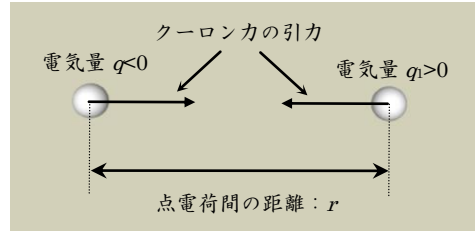


図 2.8 クーロン力の引力 2

クーロンの法則 (2.7) を (2.13) に記述する. (2.14) は本書での第 1 回の本文の (2.4) から記述できる. (2.14) を (2.15) に書き直す. (2.15) は本書の第 1 回での本文の静電場の定義 (2.1) を使用しても記述できることは明らかである. (2.15) の右辺の分子に (2.13) を代入すると (2.16) になる. (2.16) は (2.2) によって生じる静電場の式である.

$$F = q \times \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r^2} \right) \dots (2.13)$$

$$F = q \times E \dots (2.14)$$

$$E = \frac{F}{q} \frac{\text{N}}{\text{C}}, (q \neq 0) \dots (2.15)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r^2} \dots (2.16)$$

離散的に点電荷が分布している場合は, 上述の静電場のベクトル和を記述することになる. 連続的に電荷量が分布しているものと扱う場合は (2.17) で記述できる. (2.18) の分子の (2.19) は連続的に電荷量が分布しているものと仮定した領域を微小に分割した任意部分の電荷量である. (2.18) の分母の距離として扱う変数は, 静電場内のある位置から電荷量を持つ微小な任意部分までの距離である.

$$E = \int dE \dots (2.17)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{dq}{r^2} \dots (2.18)$$

$$dq \dots (2.19)$$

3. 静電学的ポテンシャルエネルギー (electrostatic potential energy)

(2.13) あるいは本書の第 1 回での本文の (2.4) を使用して仕事の計算をする. (3.1) はその式である. (2.2) によって生じる静電場内 (3.2) の位置 a 点に (2.1) の点電荷を置いて, 図 3.1 のようになるまでその点電荷を移動させた. この図 3.1 で, (2.1) と (2.2) の距離が (2.8) になる位置 b 点にまで (2.1) の点電荷を移動させた場合の仕事が (3.1) である.

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \times \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{J} \dots (3.1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, (q \neq 0) \dots (3.2)$$

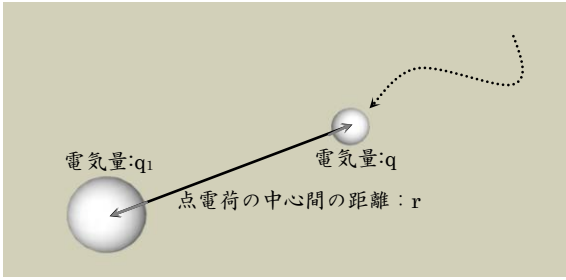


図 3.1 静電場でのクーロン力の仕事の説明図

(3.3) は本書の第 1 回で説明したポテンシャルエネルギーの変化量とその保存力のなす仕事の関係である。

(3.3) に (2.16) を使用して (3.4) を記述する。(3.4) の右辺を (3.5) の右辺のように計算する。(3.5) の右辺を (3.6) の右辺のように計算できる。(3.6) の右辺を整理すると (3.7) になる。(3.7) からクーロン力が保存力であることは明らかである。

$$\Delta U = -W = -\int_a^b (\mathbf{q} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (3.3)$$

$$\Delta U = -W = -\int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r^2} \cdot dr \dots (3.4)$$

$$\Delta U = -\int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r^2} dr = -\left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r} \right]_a^b \dots (3.5)$$

$$\Delta U = -\left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r} \right]_a^b = -\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{a} \right) \dots (3.6)$$

$$\Delta U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{a} \dots (3.7)$$

(3.7) の左辺を (3.8) のように記述する。(3.9) のように位置 a 点の静電的ポテンシャルエネルギーを定義する。(3.8) と (3.3) から (3.10) を記述する。(3.10) を (3.11) のように整理する。(3.11) に (3.12) のような極限値の計算をする。(3.12) に (3.9) を使用すると (3.13) になる。(3.13) の分母の距離の記号を (3.14) のように定めると、異なる 2 つの点電荷の相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギー (3.13) は (3.15) に記述できる。静電的ポテンシャルエネルギー (3.15) がその質点系に蓄えられている静電的ポテンシャルエネルギーとなる。異なる 2 つの点電荷が相対的配置にあることで、各点電荷にクーロン力が相互に作用している。クーロンの法則では 2 つの点電荷の電気量および距離でクーロン力の向きと大きさを説明する。そして、クーロンの法則の静電気力はベクトルであるが、静電的ポテンシャルエネルギー (3.15) はスカラーである。質点に作用するクーロン力のカベクトルを使用した仕事量 (3.1) はベクトルの線積分をすることになる。(3.10) の右辺は、そのようなベクトルの線積分をすることになるので、内積でベクトルの大きさおよび向きを記述して積分をすることになる。一般には、このような (3.1) の計算はスカラーの総和を計算するよりも多くの手順を必要とする。(3.10) の左辺は、スカラーの差を計算している。静電的ポテンシャルエネルギー (3.15) は右辺の 2 つの点電荷の電気量および距離 (3.14) で決定できるので (3.1) のような線積分よりも簡単な代入をする計算である。そして、(3.10) の左辺の差は (3.10) の右辺よりも計算の手順が少なく済むものと考えられる。(3.15) の 2 つの点電荷の電気量がそれぞれ定数である場合は、2 つの点電荷間の距離 (3.14) で静電的

ポテンシャルエネルギー (3.15) は決定する. 2つの点電荷の相対的配置は距離 (3.14) の値を決定する. その2つの点電荷の相対的配置に対してひとつの静電的ポテンシャルエネルギー (3.15) を考えることができる. 付録ivでポテンシャルエネルギーの式について説明した.

$$\Delta U = U_b - U_a \dots (3.8)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} U_a \equiv 0 \dots (3.9)$$

$$U_b - U_a = -W \dots (3.10)$$

$$U_b = -W + U_a \dots (3.11)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} U_b = \lim_{a \rightarrow \infty} (-W + U_a) \dots (3.12)$$

$$U_b = \lim_{a \rightarrow \infty} U_b = \lim_{a \rightarrow \infty} (-W + U_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{b} \dots (3.13)$$

$$b = r \dots (3.14)$$

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r} \dots (3.15) \text{ 静電的ポテンシャルエネルギー}$$

2つの点電荷で構成する質点系で, その2つの点電荷が相対的配置に在るために, その質点系に蓄えられている静電的ポテンシャルエネルギーを (3.15) で説明した. n個の点電荷で構成する質点系では, その質点系を構成している異なる2つの点電荷が相対的配置に在る. そのような質点系に蓄えられている静電的ポテンシャルエネルギーの総和は質点系の2つの点電荷が互いに相対的配置に在ることで生じる静電的ポテンシャルエネルギー (3.15) の総和になる. その質点系に蓄えられている——2つの点電荷の相対的配置に対して考える——静電的ポテンシャルエネルギー (3.15) の個数は, 質点系を構成する各質点で与えることができる線分の個数である. その線分の長さは2つの点電荷間の距離 (3.14) である.

(3.15) の右辺の分子に記述した2つの電気量の符号が同じ場合は正の符号を (3.15) の左辺がもつ. (3.15) の右辺の分子に記述した2つの電気量の符号が異なる場合は負の符号を (3.15) の左辺がもつ. (3.15) の符号は静電的ポテンシャルエネルギーの基準点を無限遠に選び, その無限遠での静電的ポテンシャルエネルギーを零—— (3.9) で定義した. ——に定義したことにも基づく. (3.15) については次のようにも言える. クーロン力の反発力の静電的ポテンシャルエネルギーは正の符号をもつ. クーロン力の引力の静電的ポテンシャルエネルギーは負の符号をもつ. (3.15) の右辺の分子および距離 (3.14) の右辺が変化しない場合は, (3.15) は定数である. このことから, (3.15) の符号は変化しない. このような仮定では, (3.2) の静電場内での (2.2) の点電荷を中心とした球面では (2.1) の点電荷が持つ静電的ポテンシャルエネルギーは同じ値になる.

(3.2) の静電場内の位置 b に (2.1) の点電荷を置いて, その点電荷——ここでは, 質点としても扱う. ——をその静電場内の位置 a にまで移動させる場合を仮定して考える. また, この静電場内の質点に作用するすべての力の合力は (3.16) であるものと仮定する. (3.16) の右辺の第一項は静電場から作用したクーロン力——クーロンの法則の (2.7) の力のことである. ——である. (3.16) の右辺の第二項は質点に作用させた外力である. この外力は, 質点に作用している合力 (3.16) の右辺の第1項の保存力以外のすべての力である. このことでは, 質点はポテンシャルエネルギーが定義されている質点系内に在ることを仮定している. (3.16) の右辺の第二項は質点系に作用する外力に解釈できる場合があるので使用した. 同様に, 質点を質点系と解釈をした場合では合力 (3.16) はその質点系に作用する外力であるものとみなすことから '外力' という表現を使用できる.

この静電場内で位置 b の運動エネルギーと位置 a の運動エネルギーの変化量を (3.17) で記述する。今、この静電場内の始点と終点の質点の速さを零と仮定——後で、この仮定を変更する。——した場合は考える。このときは、始点と終点の運動エネルギーは零である。このために、始点と終点での運動エネルギーの変化量 (3.17) は (3.18) となる。エネルギー原理——本書の第 1 回の (3.30) で説明した。——を使用して (3.19) を記述できる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ex} \cdots (3.16)$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \times m \times v_a^2 - \frac{1}{2} \times m \times v_b^2 \cdots (3.17)$$

$$\Delta K = 0 \cdots (3.18)$$

$$0 = \int_b^a (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ex}) \cdot d\mathbf{s} \cdots (3.19)$$

(3.19) の右辺は (3.20) のように項別に積分できる。(3.19) および (3.20) から (3.21) を記述できる。(3.21) を (3.22) に書き直す。(3.16) の右辺の第一項のなす仕事と第二項のなす仕事との関係は (3.22) になる。(3.22) の右辺の内積は (3.23) に記述できるものと仮定する。ただし、(3.23) の右辺の変数は (3.24) および (3.25) を満足する。

$$\int_b^a (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ex}) \cdot d\mathbf{s} = \int_b^a \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{F}_{ex} \cdot d\mathbf{s} \cdots (3.20)$$

$$\int_b^a \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{F}_{ex} \cdot d\mathbf{s} = 0 \cdots (3.21)$$

$$\int_b^a \mathbf{F}_{ex} \cdot d\mathbf{s} = - \int_b^a \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} \cdots (3.22)$$

$$\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = f_c \times d\mathbf{s} \times \cos \pi = -f_c \times d\mathbf{s} \cdots (3.23)$$

$$f_c = |\mathbf{F}_c| > 0 \cdots (3.24)$$

$$d\mathbf{s} = |d\mathbf{s}| > 0 \cdots (3.25)$$

(3.23) の右辺は、クーロン力と逆向きに質点が移動していることを示す。(3.23) の右辺から (3.26) の符号を持つことがわかる。(3.22) および (3.26) から (3.27) になることは明らかである。(3.27) は質点が (3.16) の第二項の外力の向きに移動していることを示す。

$$\int_b^a \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} < 0 \cdots (3.26)$$

$$\int_b^a \mathbf{F}_{ex} \cdot d\mathbf{s} = - \left(- \int_b^a f_c \cdot d\mathbf{s} \right) = \int_b^a f_c \cdot d\mathbf{s} > 0 \cdots (3.27)$$

(3.22), (3.27) およびポテンシャルエネルギーの変化量の定義——本書の第 1 回の (3.4) で与えた。——から (3.28) が記述できる。(3.28) は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量の符号が正であることを示す。このことは、静電的ポテンシャルエネルギーが増加していることを意味する。

$$\Delta U = - \int_b^a \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = \int_b^a \mathbf{F}_{ex} \cdot d\mathbf{s} > 0 \cdots (3.28)$$

(3.28) では外力のなした仕事は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量の増加に等しいことを示す。(3.19) から (3.29) を導出できる。(3.29) から (3.30) を記述できる。(3.30) から (3.31) を記述できる。外力——(3.30) の左辺——はクーロン力と大きさが同じで逆向きであることが (3.31) から分かる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ex} = 0 \cdots (3.29)$$

$$\mathbf{F}_{ex} = -\mathbf{F}_c \cdots (3.30)$$

$$\mathbf{F}_{ex} = -q \times \mathbf{E}, \mathbf{F}_c = q \times \mathbf{E} \cdots (3.31)$$

静電気力のなす仕事 (3.26) の符号では静電気力とは逆向きに質点が移動することを示した。エネルギー原理 (3.19) の左辺の計算では質点の速度は位置 a および位置 b では零であるものと仮定した。(3.29) では質点に作用している力 (3.16) は零になった。質点に作用している力 (3.29) が質点に作用しているすべての力の合力であるならば、ニュートン力学では慣性の法則のためにその質点は静止し続ける必要がある。しかし、仕事 (3.26) および仕事 (3.27) では質点は移動していることを示した。この計算結果を分析すると、その質点には他の力が作用しておりその他の力は外力 (3.30) の向きになるものと考えることができる。この考えにおいては、質点は位置 b で静止していても位置 a まで静電気力に抗して移動できることがニュートン力学で説明できる。そして、質点が位置 a で静止するためには位置 a に在る質点にニュートン力学で静止するように外力を考えることができる。ただし、ここでは時刻を独立変数とする関数として外力を考えている。そして、(3.16) での始点における質点の速さは外力が作用したときの時刻にその外力による加速度が生じたためにその加速度による速さになるものとする。

この計算を記述するとエネルギー原理 (3.19) は (3.32) に記述できる。(3.32) の右辺の符号は負であることは明らかである。(3.32) ではそれぞれの力を位置の変数で記述している。

$$\int_b^a \mathbf{F}_c(s) \cdot ds + \int_b^a \mathbf{F}_{ex}(s) \cdot ds = -\frac{1}{2}mv_b^2 < 0 \cdots (3.32)$$

(3.32) の左辺の保存力のなす仕事を (3.33) のように右辺に記述する。(3.33) の右辺の第一項には保存力に抗する力のなす仕事——(3.33) の括弧の中の積分の記述のこと。——が記述されているものと解釈できる。(3.33) の左辺の符号は正であることは明らかである。ただし、(3.33) の符号を判断する際には、(3.26) および (3.27) の符号を仮定する。

$$\int_b^a \mathbf{F}_{ex}(s) \cdot ds = -\int_b^a \mathbf{F}_c(s) \cdot ds - \frac{1}{2}mv_b^2 > 0, \left(-\int_b^a \mathbf{F}_c(s) \cdot ds = \int_b^a (-\mathbf{F}_c(s)) \cdot ds \right) \cdots (3.33)$$

(3.33) の右辺の第一項はポテンシャルエネルギーの変化量として (3.34) のように記述できる。そして、(3.34) の右辺は (3.35) に記述できることは明らかである。(3.34) ではポテンシャルエネルギーの増加量は運動エネルギーの減少量よりも大きいことを意味する。そして、そのポテンシャルエネルギーの増加量は始点での質点の速さの運動エネルギーよりも大きいことを (3.35) では記述している。

$$\int_b^a \mathbf{F}_{ex}(s) \cdot ds = \Delta U - \frac{1}{2}mv_b^2 > 0 \cdots (3.34)$$

$$\Delta U > \frac{1}{2}mv_b^2 > 0 \cdots (3.35)$$

著者の判断では、一般に2007年現在の物理学は静電場をニュートンの3つの運動法則が成立するものとして扱う。アインシュタインの特殊相対性理論では、電磁場においては一般には作用反作用の法則が成立するのは或る条件を満足する場合に限ることを説明している専門書もある。そのような議論では、一般には情報が与えられる速さは、有限値に限定して考察する。このような情報の速さをニュートンの3つの運動法則では無限大にまで理論上は許すことになる。アインシュタインの特殊相対性理論およびニュートンの3つの運動法則で情報の伝搬の速さが異なることは特徴となる箇所である。ただし、電磁波の電磁場は動的な電場および磁場で説明できるものとする。電磁場については本書の Option で簡単な場合の説明を与えた。

(3.2) の静電場内の位置 a に (2.1) の点電荷がある場合を考える. この点電荷を静電場内の位置 a から位置 b まで移動させる. ただし, 質点に作用するすべての外力は無いものとする.

このために (3.36) から (3.37) を記述できる. (3.37) の保存力はクーロン力である. この保存力のなす仕事は (3.38) で記述できる. この場合はエネルギー原理から (3.39) を記述できる. (3.39) の左辺は運動エネルギーの変化量である. 一方, クーロン力に定義する静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を (3.40) で記述できる. 運動エネルギーの変化量 (3.39) および静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (3.40) から (3.41) が記述できる. (3.41) から (3.42) を記述できる. (3.42) の右辺は力学的エネルギー——この場合では静電的ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和——の変化量は零であることを示す.

$$\mathbf{F}_{ex} = 0 \cdots (3.36)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ex} = \mathbf{F}_c \cdots (3.37)$$

$$\int_a^b (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ex}) \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} \cdots (3.38)$$

$$\Delta K = \int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} \cdots (3.39)$$

$$\Delta U = -\int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} \cdots (3.40)$$

$$\Delta K = -\Delta U \cdots (3.41)$$

$$\Delta U + \Delta K = 0 \cdots (3.42)$$

最初に, (3.42) の場合には (3.38) の右辺の内積は (3.43) の右辺の符号を示すものと仮定する. この静電場内の点電荷はクーロン力のみが作用して, そのクーロン力の向きに移動するものと考えることができる. (3.43) の右辺の符号は質点の移動方向とクーロン力の向きが同じ方向であることを示す. ただし, (3.43) での右辺の各ベクトルの大きさは (3.24) および (3.25) を満足する.

(3.38) および (3.43) から保存力のなす仕事 (3.44) を満足することは明らかである. 静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (3.40) および仕事 (3.44) から (3.45) を満足する. (3.41) および静電的ポテンシャルエネルギーの減少 (3.45) から運動エネルギーの増加 (3.46) を満足する.

$$\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = f_c \times ds \times \cos\theta_c > 0, (\cos\theta_c > 0) \cdots (3.43)$$

$$\int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} > 0 \cdots (3.44)$$

$$\Delta U = -\int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} < 0 \cdots (3.45)$$

$$\Delta K = -\Delta U > 0 \cdots (3.46)$$

(3.45) では静電的ポテンシャルエネルギーの変化量の符号は負である. このことは, 静電的ポテンシャルエネルギーは減少していることを示す. (3.46) では運動エネルギーの変化量の符号は正である. このことは, 運動エネルギーは増加していることを示す. (3.42) の右辺から, これらの静電的ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの増減量の総和は零——定数である.——であることは明らかである.

次に, (3.42) の場合には (3.38) の右辺の内積は (3.47) の右辺の符号を示すものと仮定する. この静電場内の点電荷はクーロン力のみが作用して, そのクーロン力の向きとは逆向きに移動するものと考えることができる. (3.47) の右辺の符号は質点の移動方向とクーロン力の向きが逆向きであることを示す. ただし, (3.47) での右

辺の各ベクトルの大きさは (3.24) および (3.25) を満足する. 理論上は, (3.42) の質点に (3.48) を満足するように速度を仮定する.

(3.38) および (3.47) から保存力のなす仕事 (3.48) を満足することは明らかである. 静電氣的ポテンシャルエネルギーの変化量 (3.40) および仕事 (3.48) から (3.49) を満足する. (3.41) および静電氣的ポテンシャルエネルギーの増加 (3.49) から運動エネルギーの減少 (3.50) を満足する.

$$\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = f_c \times ds \times \cos\theta_c < 0, (\cos\theta_c < 0) \dots (3.47)$$

$$\int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} < 0 \dots (3.48)$$

$$\Delta U = -\int_a^b \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} > 0 \dots (3.49)$$

$$\Delta K = -\Delta U < 0 \dots (3.50)$$

(3.49) では静電氣的ポテンシャルエネルギーの変化量の符号は正である. このことは, 静電氣的ポテンシャルエネルギーは増加していることを示す. (3.50) では運動エネルギーの変化量の符号は負である. このことは, 運動エネルギーは減少していることを示す. (3.42) の右辺から, これらの静電氣的ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの増減量の総和は零——定数である.——であることは明らかである.

4. 系を構成している点電荷の各相互作用で生じる静電氣的ポテンシャルエネルギー

(4.1) は2つの点電荷に互いに作用するクーロン力の式である. ひとつの点電荷に基づく静電場を考える. (4.2) は無限遠から点電荷を移動させて図 4.1 のような相対的位置を与える場合に (4.1) のなす仕事である. (4.2) は (4.3) で記述できる. (4.3) を計算すると (4.4) が, 図 4.1 での点電荷の持つ静電氣的ポテンシャルエネルギーである.

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{r^2} \dots (4.1)$$

$$W = \int_{r_1 \infty} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} \dots (4.2)$$

$$W = \int_{r_1 \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \dots (4.3)$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \dots (4.4)$$

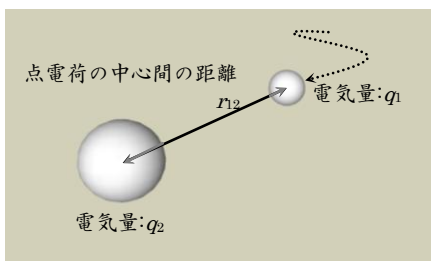


図 4.1 2つの点電荷の静電氣的ポテンシャルエネルギーの説明

図 4.1 の2つの点電荷に基づく静電場に図 4.2 のように電気量 (4.5) の点電荷を無限遠から移動させる場合の静電氣的ポテンシャルエネルギーを計算する. 各点電荷——これらの点電荷に基づいて静電場が生じている.——と, この新たに置いた電気量 (4.5) の点電荷に互いに作用しているクーロン力は (4.6) および (4.7) である. (4.6) および (4.7) のクーロン力をベクトルで記述したベクトル和を (4.8) とする.

$$q_3 \cdots (4.5)$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_3}{r^2} \cdots (4.6)$$

$$F_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_2 q_3}{r^2} \cdots (4.7)$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} \cdots (4.8)$$

(4.8) のなす仕事を (4.9) で記述する. (4.9) は (4.10) のように項別に積分することができる. (4.10) の第一項の積分は (4.11) で記述できる. (4.10) の第二項の積分は (4.12) で記述できる. (4.11) および (4.12) を使用して (4.9) は (4.13) に記述できる. (4.13) を使用すると (4.5) の点電荷が持つ静電的ポテンシャルエネルギーは (4.14) で記述できる. 本書の第1回で定義したポテンシャルエネルギーの変化量と仕事の関係式 (3.4) —— 第1回での番号である. —— から (4.14) を導出できる.

$$W = \int_{r_{3\infty}} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_{3\infty}} (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}) \cdot d\mathbf{s} \cdots (4.9)$$

$$W = \int_{r_{3\infty}} \mathbf{F}_{13} \cdot d\mathbf{s} + \int_{r_{3\infty}} \mathbf{F}_{23} \cdot d\mathbf{s} \cdots (4.10)$$

$$\int_{r_{3\infty}} \mathbf{F}_{13} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\infty}^{r_{13}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_3}{r^2} dr \cdots (4.11)$$

$$\int_{r_{3\infty}} \mathbf{F}_{23} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\infty}^{r_{23}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_2 q_3}{r^2} dr \cdots (4.12)$$

$$W = \int_{\infty}^{r_{13}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_3}{r^2} dr + \int_{\infty}^{r_{23}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_2 q_3}{r^2} dr \cdots (4.13)$$

$$U_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \cdots (4.14)$$

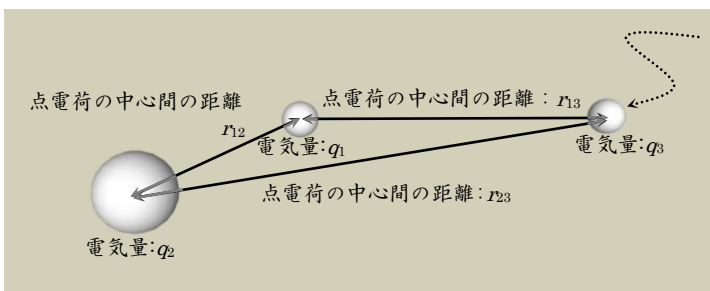


図 4.2 2つ点電荷に基づく静電場に1つの点電荷を置く場合の静電的ポテンシャルエネルギーの説明

系を構成している3つの点電荷の各相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギーの総和は (4.15) で記述できる. (4.4) および (4.14) を使用して (4.15) を (4.16) に記述できる.

$$U_{123} = U_2 + U_3 \cdots (4.15)$$

$$U_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \cdots (4.16)$$

上述の (4.16) のように系を構成している n 個の点電荷の各相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギーの総和を計算する. $n-1$ 個の点電荷に基づく静電場にひとつの点電荷を無限遠から移動させてくる場合は (4.17) でそのひとつの点電荷の静電的ポテンシャルエネルギーを記述できる. この新たに移動させた点電荷

を $n-1$ 個の点電荷に加えると、 n 個の点電荷が存在することになる。この系を構成している n 個の点電荷の各相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギーの総和は (4.18) で記述できる。

ただし、(4.19) を満足する。(4.17) および (4.18) の電気量と各点電荷間の距離の記号の意味は図 4.3 のようになる。電気量 q_i の点電荷と他の点電荷との相互作用である静電的ポテンシャルエネルギー (4.17) は次のようになる。‘電気量 q_i の点電荷と他の各点電荷の中心間の距離 (4.19)’ および ‘電気量 q_i と他の各点電荷の電気量’ で決定する各相互作用の総和が (4.17) である。

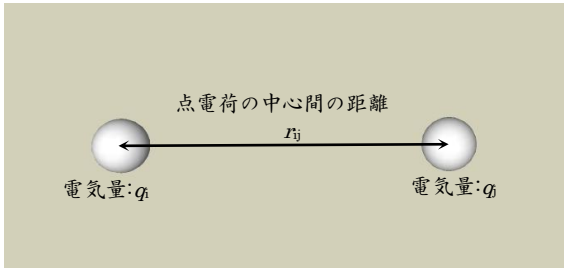


図 4.3 電気量と各点電荷間の距離の記号の説明

$$U_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \dots (4.17)$$

$$U = \sum_{i=2}^n U_i = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \dots (4.18)$$

$$r_{ij} = r_{ji} \dots (4.19)$$

(4.17) は (4.20) で記述できる。(4.20) を使用して (4.18) を (4.21) で記述できる。(4.18) と (4.21) は数学的に等価である。(4.18) と (4.21) の異なる解釈を次回——本書の第3回——で説明する。

$$U_i = q_i \times \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ij}} \dots (4.20)$$

$$U = \sum_{i=2}^n U_i = \sum_{i=2}^n \left(q_i \times \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ij}} \right) \dots (4.21)$$

2 つ以上の点電荷で構成する系の各点電荷に基づく静電場は (4.22) で記述できる。(4.22) の静電場に点電荷を無限遠から移動させてくるのに、その静電場のクーロン力のなす仕事は (4.23) で記述できる。各点電荷に基づく静電場内で、ある点電荷に作用するクーロン力のなす仕事は (4.24) で記述できる。本書の第1回で説明したポテンシャルエネルギーの変化量と仕事の関係式を使用すると (4.25) を記述できる。(4.25) の左辺を (4.26) で定義する。(4.24) および (4.26) を使用して (4.25) を (4.27) で記述する。(4.27) は (4.28) に記述できる。(4.24) を使用すると (4.28) は (4.29) に記述できる。系の静電的ポテンシャルエネルギーでは (4.29) から (4.30) を記述できる。(4.18) および (4.31) を使用すると系の静電的ポテンシャルエネルギー (4.30) は (4.32) に記述できる。

$$\mathbf{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ij}^2} \dots (4.22)$$

$$W_{ij} = \int_{\infty}^{r_{ij}} (q_i \times \mathbf{E}_j) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.23)$$

$$W_i = \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij} = \sum_{j=1}^{i-1} \int_{\infty}^{r_{ij}} (q_i \times \mathbf{E}_j) \cdot d\mathbf{s} = q_i \times \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ij}} \right) \dots (4.24)$$

$$\Delta U_i = -W_i \dots (4.25)$$

$$\Delta U_i \equiv U_i - 0 \dots (4.26)$$

$$U_i - 0 = -\sum_{j=1}^{i-1} W_{ij} \dots (4.27)$$

$$U_i = -\sum_{j=1}^{i-1} W_{ij} \dots (4.28)$$

$$U_i = -W_i \dots (4.29)$$

$$\sum_{i=2}^n U_i = \sum_{i=2}^n (-W_i) \dots (4.30)$$

$$W = \sum_{i=2}^n W_i \dots (4.31)$$

$$U = -W \dots (4.32)$$

本書の第1回の付録iiで説明した系のエネルギー保存則を簡略に使用して2つ以上の点電荷で構成している系のエネルギーを考える。系のエネルギー保存則(4.33)がn個の点電荷が構成する系に成立するものと仮定する。

(4.33)の左辺の第三項は内部エネルギーの変化量を意味する。(4.34)を仮定する。さらに、各点電荷に作用していた外力を零にして外力のなす仕事(4.35)を仮定する。内部エネルギーの変化量(4.34)および外力のなす仕事(4.35)を使用すると系のエネルギー保存則(4.33)は(4.36)で記述できる。

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{internal}} = W_{\text{external}} \dots (4.33) \text{系のエネルギー保存則}$$

$$\Delta E_{\text{internal}} = 0 \dots (4.34)$$

$$W_{\text{external}} = 0 \dots (4.35)$$

$$\Delta U + \Delta K = 0 \dots (4.36)$$

各点電荷がすべて同符号の場合を考える。(4.32)を使用して(4.37)を仮定すると(4.38)を(4.39)に記述できる。(4.39)では無限遠から点電荷を移動させてくるときにクーロン力のなした仕事の総和(4.31)は、点電荷が互いに反発したときの運動エネルギーの変化量に等しいことを示している。

$$\Delta U = U - 0 = -W \dots (4.37)$$

$$\Delta K = -\Delta U \dots (4.38)$$

$$\Delta K = W \dots (4.39)$$

5. あとがき

次回——第3回——では静電的ポテンシャルエネルギーを使用して電位の定義について説明する。また、静電場を使用して電位を計算する方法について説明する。電位の場合で(4.17)と(4.20)の解釈の異なる点を説明する。さらに、(4.18)および(4.21)の解釈についても電位の場合で考える。

1990年代の日本の物理学指導での静電的ポテンシャルエネルギーについては、本書の第2回のような説明では著者の記憶はない。しかし、本書の第3回で電位の定義には静電的ポテンシャルエネルギーを使用するために、第2回で静電的ポテンシャルエネルギーについて説明した。

静電的ポテンシャルエネルギーが不連続な値をとる場合を付録vのボーア理論1で説明をしている。付録vのボーア理論1では運動エネルギーおよび静電的ポテンシャルエネルギーの和が不連続な値をとる場合を説明している。まえがきでも説明したようにボーア理論については、本書の第2回、第3回および第4回の付録で説明をする。第2回および第3回の付録ではボーア理論を説明する。第4回では、第2回および第3回で説明した水素原子モデルよりも実際の水素原子に近いものと考えられている水素原子モデルを考察する。ボーア理論で使用する知識の一部は、本書の第1回の付録で説明したアインシュタインの光量子の仮定についてである。一般的

な日本の大学の電気・電子・光学系の科目では、エネルギーが不連続な値をとることは量子論あるいは量子力学でも使用することもある知識である。

本書では第2回から Option まで静電的ポテンシャルエネルギーを使用する。電位の定義のみではなく、本書の計算にはたびたび静電気力および静電的ポテンシャルエネルギーを必要としている。第3回および第4回では電位および電位差の定義に静電的ポテンシャルエネルギーを使用する。第5回では電位および電位差の微分を記述するのに静電的ポテンシャルエネルギーの微分を使用する。Option では電位および電位差の定義に対する著者の意見を論じる際に静電的ポテンシャルエネルギーを使用する。

付録

i. 電気素量 (elementary charge)

電気量が連続した値をとるのではなく整数倍で離散的な——電気量が不連続な値になる。量子化とも言う。——値になることが報告されている。電気量は (a.1.1) のように離散的に測定できたことの報告がある。(a.1.1) では (a.1.2) を満足する。(a.1.2) を電気素量と呼ぶ。電子の場合は (a.1.1) で $n=-1$ となり、陽子の場合は (a.1.1) で $n=1$ となる報告がある。中性子の場合は (a.1.1) で $n=0$ となる報告がある。電気素量 (a.1.2) は文献5の CODATA のものを使用した。

$$q = n \times e \text{ C}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \dots (\text{a.1.1})$$

$$e = 1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C} \dots (\text{a.1.2})$$

しかし、1964年にクォーク (quark) 模型と呼ばれるものが提唱された。このクォーク模型では、クォークと呼ばれる基本粒子を使用している。このクォークを使用すると陽子および中性子の電気量は次のように計算できる。クォークは (a.1.3) あるいは (a.1.4) の電気量をもつものがある。これらの (a.1.3) および (a.1.4) のクォークを使用して陽子と中性子の電気量は、それぞれ (a.1.5) および (a.1.6) になることが報告されている。(a.1.5) および (a.1.6) のように陽子あるいは中性子はクォークで構成できることを、素粒子物理学では説明している。

$$+\frac{2}{3}e \text{ C} \dots (\text{a.1.3})$$

$$-\frac{1}{3}e \text{ C} \dots (\text{a.1.4})$$

$$\text{陽子}: 2 \times \left(\frac{2}{3}e\right) + 1 \times \left(-\frac{1}{3}e\right) = e \text{ C} \dots (\text{a.1.5})$$

$$\text{中性子}: 1 \times \left(\frac{2}{3}e\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}e\right) = 0 \text{ C} \dots (\text{a.1.6})$$

(a.1.1), (a.1.3) および (a.1.4) でも、電気量は量子化している。日本では一般的に、クォーク模型は素粒子物理学の分野の研究になる。

ii. 国際単位系での真空中の誘電率と真空中の光の速さ^{3), 4), 5), 20)}

SI では7つの基本量を定義した。SI で定義した基本量を使用して、組立量と呼ばれる量を定義する。基本量の単位を基本単位と呼ぶ。組立量の単位は組立単位と呼ぶ。SI で定義した7つの基本量の中には、長さおよび電流が有る。長さの基本単位は m である。電流の基本単位は A である。

長さおよびその基本単位を定義する際に、SIでの真空中の光の速さを (2.11) で定義している。電流およびその基本単位を定義する際に、SIでの真空中の透磁率を (a.2.1) で定義している。

$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \dots$ (2.11) SI でメートルの定義を与える際に、真空中の光の速さ (2.11) の値に定義した。

$\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7} \dots$ (a.2.1) SI でアンペアの定義を与える際に、真空中の透磁率 (a.2.1) の値に定義した。

真空中の誘電率 (2.10) は真空中の光の速さ (2.11) および真空中の透磁率 (a.2.1) を使用して、(2.10) のように値を求めることができる。文献5のCODATAの値を使用して真空中の誘電率 (2.10) の右辺の値を与えた。

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \doteq 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \dots (2.10)$$

(2.10) の右辺の値よりも正確な真空中の誘電率の値は (a.2.2) で与える。真空中の光の速さ (2.11) および真空中の透磁率 (a.2.1) を使用して、真空中の誘電率 (a.2.2) を (a.2.3) で記述できる。

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \dots (a.2.2) \text{ 真空中の光の速さ (2.11) および真空中の透磁率 (a.2.1) で導出した真空中の誘電率}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \times c^2} \dots (a.2.3)$$

電磁気学では電場と磁場を主に扱う。本書では第5回で電場および磁場について説明をしている。ここでは、電場および磁場と呼ばれる場が存在することを仮定して、電場および磁場で説明できる電磁場が存在するものとする。さらに、光は電磁場として空間を伝搬するものとする。そして、電場の波動方程式および磁場の波動方程式では、電磁場が (a.2.4) の速さで真空中を伝搬するものと解釈されている。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \epsilon_0}} \dots (a.2.4) \text{ マクスウェルの方程式系から導出できる電磁場の波動方程式での真空中の光の速さ}$$

理論計算で導出できた電磁場が真空中を伝搬する速さ (a.2.4) を真空中の光の速さと呼んでいる。この (a.2.4) から (a.2.3) を記述できる。

本書ではマクスウェルの方程式系については第3回から説明をする。電磁場の波動方程式の導出については本書の Option で与えた。

iii. 誘電率を考慮した計算

(a.3.1) の左辺は誘電率である。(a.3.1) の右辺は (a.3.2) と真空中の誘電率との積である。(a.3.2) は比誘電率と呼ばれる。(a.3.3) の場合は (a.3.1) は (a.3.4) になる。

$$\epsilon = \epsilon_r \times \epsilon_0 \dots (a.3.1)$$

$$\epsilon_r \dots (a.3.2)$$

$$\epsilon_r = 1 \dots (a.3.3)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \dots (a.3.4)$$

(2.7) に (a.3.1) を使用すると (a.3.5) に記述できる。(a.3.5) では力の大きさと向きが (2.7) とは異なる場合がある。力の大きさは (a.3.2) によって (2.7) と異なることは明らかである。2つの点電荷に作用する力の向きは、誘電率 (a.3.1) の符号および各点電荷の電気量の符号によって決定する。2つの点電荷に互いに作用するクーロン力で定義する静電的ポテンシャルエネルギーは (a.3.6) で記述できる。このことは、第2回の3章の本文で明らかである。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qq_1}{r^2} \text{ N} \dots (2.7) \text{ クーロンの法則}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \times \frac{qq_1}{r^2} \dots (a.3.5)$$

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \times \frac{qq_1}{r} \dots (\text{a.3.6})$$

(a.3.5) の力の向きを考察する. (a.3.7) の場合は, 点電荷の符号のみで力の向きが決定することは (2.7) と同様である. (a.3.8) の場合は, (2.7) の向きとは逆になることは明らかである. この (a.3.8) の場合は, 同じ符号の2つの点電荷に作用する力は, 互いに引き合う力である. また, 異符号の2つの点電荷に作用する力は, 互いに反発する力である.

$$\epsilon_r > 0 \dots (\text{a.3.7})$$

$$\epsilon_r < 0 \dots (\text{a.3.8})$$

さらに, 静電的ポテンシャルエネルギーの符号は (a.3.8) では (a.3.7) の場合とは逆になる. この場合は, 同じ符号の点電荷の相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギーは負になり, 異符号の点電荷の相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギーは正になる.

iv. 保存力の仕事とポテンシャルエネルギーの関係

(a.4.1) を使用してポテンシャルエネルギーを計算する. (a.4.1) の右辺は (a.4.2) とする. (a.4.2) の右辺の保存力は (a.4.3) である. (a.4.1) の左辺を (a.4.4) で記述する. (a.4.2) および (a.4.4) を (a.4.1) に代入すると (a.4.5) になる. (a.4.5) を (a.4.6) に記述する. (a.4.6) に (a.4.7) を仮定すると (a.4.8) になる. (a.4.7) はポテンシャルエネルギーの基準点とする.

$$\Delta U_{ab} = -W_{ab} \dots (\text{a.4.1})$$

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (\text{a.4.2})$$

$$\mathbf{F} \dots (\text{a.4.3})$$

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a \dots (\text{a.4.4})$$

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (\text{a.4.5})$$

$$U_b = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + U_a \dots (\text{a.4.6})$$

$$U_a = 0 \dots (\text{a.4.7})$$

$$U_b = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (\text{a.4.8})$$

(a.4.9) を使用してポテンシャルエネルギーを計算する. (a.4.9) の右辺は (a.4.10) とする. (a.4.10) の右辺の保存力は (a.4.3) である. (a.4.9) の左辺を (a.4.11) で記述する. (a.4.10) および (a.4.11) を (a.4.9) に代入すると (a.4.12) になる. (a.4.12) を (a.4.13) に記述する. (a.4.13) に (a.4.7) を仮定すると (a.4.14) になる.

$$\Delta U_{ba} = -W_{ba} \dots (\text{a.4.9})$$

$$W_{ba} = \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (\text{a.4.10})$$

$$\Delta U_{ba} = U_a - U_b \dots (\text{a.4.11})$$

$$U_a - U_b = -\int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (\text{a.4.12})$$

$$-U_b = -\int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - U_a \dots (a.4.13)$$

$$U_b = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (a.4.14)$$

質点の移動の始点および終点はそれぞれ異なることを仮定しているが、(a.4.8) と (a.4.14) は同じ記述である。この場合は、(a.4.9) は (a.4.1) とは始点と終点を逆にした質点の移動で記述したので (a.4.14) は (a.4.8) とは物理現象としての意味は異なる。(a.4.8) および (a.4.14) から分かるように始点と終点を逆にした質点の移動での——(a.4.2) および (a.4.10) のように記述する。——ポテンシャルエネルギーの式は同じ積分に記述できる。ただし、ポテンシャルエネルギーの基準点を (a.4.7) で等しくする。

v. ボーア理論 1 (Bohr Theory)

本書の第2回までで、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、光量子およびクーロンの法則について説明をした。第1回の付録ではプランクが空洞放射でのエネルギーの量子化を提案したことを説明した。そのエネルギーの量子化では、エネルギーが0以上の整数倍になる不連続な値をとることになった。定常状態に有る原子の或る実験では、束縛エネルギー——結合エネルギーとも呼ぶこともある。——と呼ばれるエネルギーは不連続な値をとることの報告がある。ここでの束縛エネルギーは、原子の原子核に、その原子内の電子を束縛しているエネルギーとして扱われる。本書のボーア理論では、原子の定常状態では、その原子はイオン化していない。そして、その原子が定常状態に有る時間には、その原子からはエネルギーの吸収および放出を一切していない。ただし、付録vで使用する水素原子では原子核と扱わないで陽子として扱うこともできる。

付録vでは、定常状態に有る水素原子内の電子が持つ運動エネルギーと静電的ポテンシャルエネルギーの和を古典理論での束縛エネルギーとして扱う。ここでは、有名なボーアの水素原子のモデルを使用して、そのような電子の持つ運動エネルギーと静電的ポテンシャルエネルギーの和が不連続な値を示すことを考察する。関数の不連続となる数については本書の第5回の付録で説明をしている。

ボーアの水素原子モデルは、一般には前期量子論とよばれる分野に属するものとして扱われる。物理学では、前期量子論での研究から量子力学での研究へと結び付けて考えていく。ボーアの水素原子のモデルでの計算結果の一部は前期量子論での実験の結果と一致していることが報告されている。さらに、ボーアの水素原子のモデルは量子力学での理論に一致する部分も有る。ボーア理論でのモデルを使用して、どのようにモデルを使用して必要な事柄を知ることができるのかを、考える。本書ではボーア理論は第2回、第3回および第4回の付録で扱う。第2回ではボーア理論の束縛エネルギーおよび水素原子内の電子と原子核との間の距離を導出するところまでとする。第3回では、第2回で論じた部分を使用して、第2回のボーア理論とは異なるボーア理論を説明する。それらのボーア理論で使用したボーアの水素原子モデルで計算できる角運動量を考察する。そして、その角運動量を仮定に格付けて第2回のボーア理論とは別の解釈のボーア理論の計算を示す。第2回および第3回で説明したボーア理論の計算についての解釈を、第3回ではボーアの水素原子モデルが実験値および量子力学の結果に対してどのように一致しているかを考察する。第4回では、第2回および第3回で使用したボーアの水素原子モデルよりも実際の水素原子に近いと考えられている水素原子モデルについて考察する。その考察では、第1回の系のエネルギーの保存則および第2回～第3回で説明したボーア理論を応用して、定常状態の束縛エネルギー、リュードベリ定数および角運動量などについての計算をする。

著者の構築した循環系の回路モデルでの物理学およびヒトの心臓血管系との一致については文献11～文献15に説明してある。著者の循環系の回路モデルでは、心臓血管系を回路モデルとして表現する。その回路モデルに電気の回路論を応用して、循環系の回路方程式を導出する。その循環系の回路モデルの物理的モデルである回

路および数学的モデルである方程式をヒトの心臓血管系の報告と比較して研究することがたびたびある。ボーア理論では、ボーアの理論で得ることができる水素原子モデルでの値および運動などを実際の観測で事実と考えられている事柄と比較して検討する。ボーア理論では古典力学、電磁気学および前期量子論での知識を使用する。文献 1 1 および文献 1 2 では、物理学の知識では電気の回路論および力学の知識を主に使用している。電気の回路論の詳細は、日本国内の大学で使用されている一般のものとは異なる箇所がある。それらの箇所は本書で説明を試みている。文献 1 1 で使用した物理学の知識では、古典理論での流体力学を考慮した箇所、一般的な大学課程の工学科の物理学にも紹介される知識を使用した。ただし、文献 1 1 は論文であるので、研究過程のものを論じている。

水素原子のスペクトルの実験から (a.5.1) の計算式が発見された。式 (a.5.1) では (a.5.2) および (a.5.3) を仮定する。(a.5.2) および (a.5.3) の各数は正の整数である。(a.5.1) の右辺には水素原子のリュードベリ定数と呼ばれる (a.5.4) を記述してある。

$$\frac{1}{\lambda_L} = R_H \times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \dots (a.5.1)$$

$$n = m+1, m+2, \dots, \dots (a.5.2)$$

$$m = 1, 2, \dots, \dots (a.5.3)$$

$$R_H \text{ m}^{-1} \dots (a.5.4)$$

(a.5.1) の左辺の分母は水素原子から放たれた光の波長として扱われる。式 (a.5.1) の右辺は、不連続な値を与えることは明らかである。このことから、(a.5.1) の左辺の分母に記述した光の波長も不連続な値として与えられることが考察できる。

実験式 (a.5.1) を (a.5.5) に書き直す。さらに、(a.5.5) を (a.5.6) に書き直し波長 (a.5.6) を記述できる。(a.5.6) の m を定数として、 n を変数として波長 (a.5.6) の極限値を (a.5.7) のように計算できる。

$$\frac{1}{\lambda_L} = R_H \times \left(\frac{n^2 - m^2}{m^2 \times n^2} \right) \dots (a.5.5)$$

$$\lambda_L = \frac{1}{R_H \times \left(\frac{n^2 - m^2}{m^2 \times n^2} \right)} \dots (a.5.6) \text{ 水素原子から放たれた光の波長}$$

$$\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_H \times \left(\frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{m^2} \right)} = \frac{1}{R_H \times \left(\frac{1}{m^2} \right)} = \frac{m^2}{R_H} \dots (a.5.7) \text{ series limit}$$

(a.5.6) および (a.5.7) を使用して、光の波長および電磁スペクトル領域についての名前を表 a.5.1 に整理した。表 a.5.1 を計算する際には (a.5.8) を水素原子のリュードベリ定数として使用した。CODATA で発表しているリュードベリ定数 (a.5.9) を使用して、水素原子のリュードベリ定数 (a.5.8) は理論式から算出した。水素原子のリュードベリ定数 (a.5.8) の理論式は本書の第 4 回に説明する。

$$R_H = 10967758.34 \text{ m}^{-1} \dots (a.5.8)$$

$$R_\infty = 10973731.568527 \text{ m}^{-1} \dots (a.5.9)$$

水素原子のスペクトル線には系列で整理した名前が付けられている。表 a.5.1 の一番左の列には、その系列名を示した。表 a.5.1 の左から 2 番目の列には (a.5.3) の整数の 1 から 5 を表示している。表 a.5.1 の左から 3 番目の列

には (a.5.2) の整数および (a.5.7) の計算で使用した ∞ を表示した. 表 a.5.1 の左から 4 番目の列には, 左から 2 番目及び 3 番目の列に表示してある (a.5.2) および (a.5.3) の値を使用して, (a.5.6) から算出した水素原子のスペクトルの波長を各系列の上段の波長の欄に表示した. 表 a.5.1 の左から 4 番目の波長の各系列になる行に在る波長の下段の欄には, 左から 2 番目の列に表示してある (a.5.3) の値および (a.5.7) を使用して算出した波長を表示した. 表 a.5.1 の左から 4 番目の波長の値を使用して, 表 a.5.1 の一番右の列には電磁スペクトル領域の名前を示した. 著者の経験では, ここで使用した電磁スペクトル領域は, 日本での電磁波の波長領域と呼ばれるものになる. ただし, 電磁スペクトル領域での可視光線と紫外線の境界線に当たる波長は, 著者の知る上では 2008 年現在の値は 2008 年現在から 20 年以上も昔の資料とでは異なる値になっていることもある. このことでは, 読者の注意を要するものとする.

系列名	m	n	波長	電磁スペクトル領域
ライマン系列 Lyman series	1	2	$\lambda_2=0.12\mu\text{m}$	紫外線
		∞	$\lambda_\infty=91.2\text{nm}$	
バルマー系列 Balmer series	2	3	$\lambda_3=0.66\mu\text{m}$	可視光線 および紫外線
		∞	$\lambda_\infty=0.36\mu\text{m}$	
パッシェン系列 Paschen series	3	4	$\lambda_4=1.88\mu\text{m}$	赤外線
		∞	$\lambda_\infty=0.82\mu\text{m}$	
ブラケット系列 Brackett series	4	5	$\lambda_5=4.05\mu\text{m}$	赤外線
		∞	$\lambda_\infty=1.46\mu\text{m}$	
プント系列 Pfund series	5	6	$\lambda_6=7.46\mu\text{m}$	赤外線
		∞	$\lambda_\infty=2.28\mu\text{m}$	

水素原子のリュードベリ定数には, $R_H = 10967758.34\text{m}^{-1}$ を使用した. ここで使用した水素原子のリュードベリ定数は CODATA で発表している $R_\infty = 10973731.568527\text{m}^{-1}$ を使用して第 4 回で説明する理論計算から導出したものである.

表 a.5.1 水素原子のスペクトル線の系列

水素原子から放たれる光の不連続な波長を示す式 (a.5.1) を使用してボーア理論と呼ばれる水素原子の構造についての計算ができる. 本書の第 2 回の付録 v で説明するボーア理論の計算では, つぎのような 4 つの仮定をする.

仮定 I : 定常状態に有る水素原子では, 古典理論に従い, 電子は原子核を中心とする等速円運動を続ける.

本書の第 2 回の付録 v で説明するボーア理論では, 定常状態に有る水素原子内の原子核の周りで, その水素原子内の電子は図 a.5.1 のような等速円運動をする. 古典理論の電磁気学では原子核の周りを回転する電子はエネルギーを連続的に放出してしまう. そして, その電子は螺旋状の軌道を描きながら原子核に向かってしまうものと説明されている. その結果として, その電子は原子核に衝突してしまい, 水素原子の大きさが原子核のように小さくなってしまふものと考えられている. そのように水素原子から電磁波が放射されることで表示できる連続的な電磁スペクトルや, 水素原子の大きさが原子核のように小さくなってしまふことは, 日常的に我々が考えている水素原子の安定な状態とは一致しないことになる. 2008 年現在の著者の資料では, 原子核の半径を表示するのに使用されている記号は $10^{-15}\text{m} = \text{fm}$ ——フェルミ (fermi) と呼ぶ. ——であり, 原子の半径を表示するのに使用されている記号は $10^{-10}\text{m} = \text{\AA}$ として報告されている. $10^{-15}\text{m} = \text{fm}$ はフェムトと呼ぶ SI での接頭辞である. $10^{-10}\text{m} = \text{\AA}$ はオングストロームと呼ぶ非 SI 単位である. 上述の古典理論の電磁気学での計算では水素原子内の電子から電磁波が放射されて連続的な電磁スペクトルとなるエネルギーを放出するものと説明されている. このような連続的な電磁スペクトルとなるエネルギーを放出することは (a.5.1) からは否定されるものと考えられる. このために, 仮定 II を与えて定常状態の水素原子から光が放たれないようにモデルを構築する. また, 仮定 I が成立するためには, 電子が持つ力学的エネルギーの増減が生じないようにする必要がある. このためにも仮定 II

をモデルに加えることになる。もし、その電子の力学的エネルギーが増減してしまうと図 a.5.1 のような等速円運動の半径が変わってしまうことになり、等速円運動が続かなくなってしまうことが古典物理学の計算から説明できる。この説明については、この付録 v の中で後で説明する。電磁波については、本書の Option で簡単な説明を与えた。

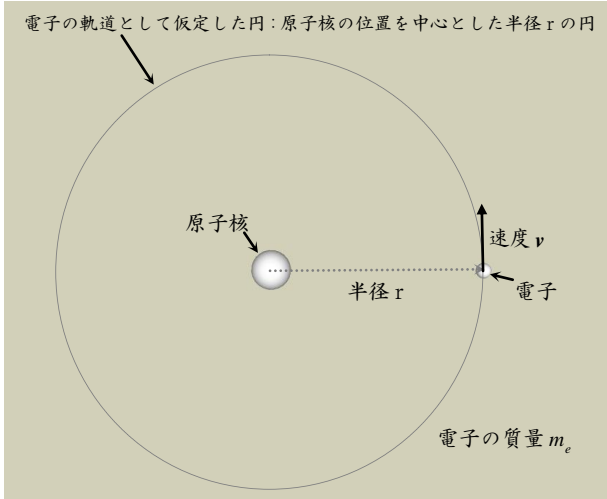


図 a.5.1 ボーアの水素原子モデルの説明図

仮定Ⅱ：定常状態に有る水素原子では、エネルギーを吸収あるいは放出しないで、原子核に電子を縛り付けているエネルギー——束縛エネルギーのこと。——は定数である。

仮定Ⅱを図 a.5.1 で使用すると、定常状態に有る水素原子では、原子核の周りを等速円運動する電子はエネルギーを吸収あるいは放出しないで、その等速円運動を続けることができるものとする。図 a.5.1 のような或る等速円運動をする軌道に在る電子は束縛エネルギー (a.5.10) を定数として持つものとする。

$$E_m \cdots (a.5.10)$$

エネルギーを放出しないことから、定常状態の水素原子は光を放たないものと説明をすることができる。そして、ここでの束縛エネルギーは、その電子の持つ運動エネルギーと静電的ポテンシャルエネルギーの和で古典理論から与えるものである。その束縛エネルギーは定数であるので、その電子の等速円運動の半径は変わらないものと古典力学から説明できる。このことは、後に式で説明をする。

仮定Ⅲ：電子が別の定常状態の軌道に移るときには周波数 ν_{Lqnm} (a.5.11) のひとつの光量子が持つエネルギーを吸収あるいは放出する。

仮定Ⅲを図 a.5.1 で使用すると、図 a.5.1 の或る軌道に在る電子がエネルギー (a.5.10) を持つものと仮定する。そして、図 a.5.1 のような等速円運動の別の軌道に在る場合の、その電子の持つ束縛エネルギーを (a.5.12) に仮定する。ここでは、(a.5.10) および (a.5.12) の束縛エネルギーは (a.5.13) の関係になるものとする。

$$\nu_{Lqnm} = \frac{E_n - E_m}{h}, (E_n > E_m) \cdots (a.5.11)$$

$$E_n \cdots (a.5.12)$$

$$E_n > E_m \cdots (a.5.13)$$

束縛エネルギー (a.5.10) になる軌道に在る電子は、光量子のエネルギー (a.5.14) を吸収して束縛エネルギー (a.5.12) になる軌道に移るものとする。逆に、束縛エネルギー (a.5.12) になる軌道に在る電子は、光量子のエネルギー (a.5.14) を放出して束縛エネルギー (a.5.10) になる軌道に移るものとする。

$$h \cdot \nu_{Lqnm} \cdots (a.5.14)$$

光量子については本書の第1回の付録で説明をしている。その付録でも説明したように、コンプトン効果が認められた後には光量子としての考えから粒子として扱うことができる光子として考えられるようになったことが報告されている。しかし、そのような報告ではコンプトン効果はボーア理論が発表された後に発見されたことになる。このために、この付録vでは光子とは呼ばずに光量子として扱うことにした。この後に示す計算では、光量子として扱うだけで済み、粒子としての光子として扱う計算をしていないものと解釈できる。

仮定IV：対応原理 (correspondence principle) を仮定する。対応原理とは次のようなものである。

「量子論の量子数がとても大きくなる限界では、量子論は古典理論に一致するものと考えることができる。」

対応原理では、量子数が大きくなるにつれて、量子論の予言は古典理論の予言に近づくものと解釈される。対応原理は上述のように客観性が低い表現であり、著者の経験ではその扱い方には注意を要する。

本書の第2回の付録vで説明するボーア理論の計算では、仮定I～仮定IIIでボーアの水素原子モデルを記述している。そして、第2回の付録vでは仮定IVを使用して、リュードベリ定数 (a.5.4) の近似値を導出する。

$$R_H \text{ m}^{-1} \dots (\text{a.5.4})$$

上述の4つの仮定——仮定I～仮定IVのこと。——を使用してボーア理論の計算を行う。ここでは、まず原子核の電気量が (a.5.15) であるものとして計算をする。(a.5.15) では、電気素量 (a.1.2) および原子番号 (a.5.16) を使用している。その水素原子の電子の電気量は $-e$ であるものとする。計算の途中では、水素原子の原子番号 (a.5.17) を代入する箇所もある。

$$Z \cdot e \dots (\text{a.5.15})$$

$$e = 1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C} \dots (\text{a.1.2}) \text{ 電気素量}$$

$$Z \dots (\text{a.5.16}) \text{ 原子番号}$$

$$Z = 1 \dots (\text{a.5.17}) \text{ 水素原子の原子番号}$$

(a.5.1) および仮定IIIを使用して束縛エネルギー (a.5.18) および束縛エネルギー (a.5.19) を導出する。束縛エネルギー (a.5.18) の左辺は、(a.5.10) である。束縛エネルギー (a.5.19) の左辺は、(a.5.12) である。束縛エネルギー (a.5.18) は (a.5.3) で決定する。同様に、束縛エネルギー (a.5.19) は (a.5.2) で決定する。このようにエネルギーを量子化——ここでは、不連続な値として束縛エネルギーを決定する。——することを決定する正の整数 (a.5.2) および正の整数 (a.5.3) を、ここからは、量子数と呼ぶことにする。

$$E_m = -\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m^2} \dots (\text{a.5.18}) \text{ 束縛エネルギー——あるいは結合エネルギー——}$$

$$E_n = -\frac{h \cdot c \cdot R_H}{n^2} \dots (\text{a.5.19}) \text{ 束縛エネルギー——あるいは結合エネルギー——}$$

λ_{Lm} は水素原子内の電子が吸収あるいは放出する光量子の光の——仮定IIIを使用した——波長であるものとする。ここで、水素原子内の電子が吸収あるいは放出した光が真空中を伝搬したものとする (a.5.20) を記述できる。(a.5.20) では、光を波として計算している。その波の計算に、(a.5.1) を使用すると、(a.5.20) の右辺を記述できる。(a.5.20) には真空中の光の速さ (2.11) を記述した。その光の波の周波数は (a.5.20) で記述できる。(a.5.20) の左辺の水素原子が放った光の周波数を使用すると、仮定IIIの (a.5.11) は (a.5.21) に書き直すことができる。(a.5.21) の左辺はひとつの光量子が持つエネルギーである。

$$\nu_{Lm} = \frac{c}{\lambda_{Lm}} = c \times R_H \times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \dots (\text{a.5.20})$$

$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \dots (2.11)$ 真空中の光の速さ

$$h \cdot \nu_{Lm} = E_n - E_m, (E_n > E_m) \dots (a.5.21)$$

(a.5.21) の左辺に (a.5.20) を使用して, (a.5.22) で記述できる. (a.5.21) の左辺は (a.5.22) の左辺に等しいので, (a.5.23) になる. (a.5.23) の右辺の添え字の記号 n および m について整理すると, (a.5.24) を記述できる.

(a.5.24) の両辺の記号での対応関係から図 a.5.1 のような或る軌道に在る電子が持つ運動エネルギーと静電的ポテンシャルエネルギーの和としてのエネルギー (a.5.18) および (a.5.19) を仮定する. (a.5.18) および (a.5.19) の記述から明らかなように, ボーアの水素原子モデルでは, 図 a.5.1 のような電子が等速円運動で描く或る軌道は量子数 (a.5.2) および量子数 (a.5.3) に対応して決定する. (a.5.18) および (a.5.19) は前期量子論の枠内に有るアインシュタインの光量子の仮定を使用したものと解釈できる仮定Ⅲと (a.5.1) を使用して導出できたものである.

$$h \cdot \nu_{Lm} = h \cdot c \times R_H \times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \dots (a.5.22)$$

$$E_n - E_m = h \cdot c \times R_H \times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \dots (a.5.23)$$

$$E_n - E_m = \left(-\frac{h \cdot c \times R_H}{n^2} \right) - \left(-\frac{h \cdot c \times R_H}{m^2} \right) \dots (a.5.24)$$

(a.5.20) を (a.5.25) に整理する. ここでは, 図 a.5.1 のような電子の等速円運動で描く軌道を 2 つ指定することになる. ひとつは, 量子数 (a.5.3) の任意のひとつの整数に対応する軌道とする. もうひとつの軌道は量子数 (a.5.26) で決定する軌道である.

$$\nu_{Lm} = c \times R_H \times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \dots (a.5.25)$$

$$n = m + 1 \dots (a.5.26) \text{ 量子数}$$

量子数 (a.5.26) を (a.5.25) に代入すると, (a.5.27) を記述できる. (a.5.27) の右辺は (a.5.28) に書き直すことができる. (a.5.28) を (a.5.29) のように計算することができる. (a.5.29) の右辺は, 後で使用される計算のために (a.5.30) のように書き直すと, (a.5.31) のように整理できる.

$$\nu_{Lm+1m} = c \times R_H \times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \dots (a.5.27)$$

$$\nu_{Lm+1m} = c \times R_H \times \left\{ \frac{(m+1)^2 - m^2}{m^2 \times (m+1)^2} \right\} \dots (a.5.28)$$

$$\nu_{Lm+1m} = c \times R_H \times \left\{ \frac{(2 \times m + 1)}{m^2 \times (m+1)^2} \right\} \dots (a.5.29)$$

$$\nu_{Lm+1m} = c \times R_H \times \left\{ \frac{\left(2 \times \frac{m}{m} + \frac{1}{m} \right)}{\frac{m^2}{m} \times (m+1)^2} \right\} \dots (a.5.30)$$

$$\nu_{Lm} = c \times R_H \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m}\right)}{m \times (m+1)^2} \right\} \cdot (\nu_{Lm} = \nu_{L_{m+1}}) \dots \text{(a.5.31) 水素原子が吸収あるいは放出する光量子の光の周波数}$$

電子の質量を (a.5.32) で与える. 電子の質量 (a.5.32) は CODATA で発表した数値を使用している. 図 a.5.1 のように水素原子内の原子核と電子との距離を (a.5.33) で記述する. その電子の等速円運動の速さを (a.5.34) で記述する. 本書の第 2 回の図 a.5.1 のようなボーアの水素原子モデルでは, 電子は真空中を等速円運動しているものと仮定する.

$$m_e = 9.10938215 \times 10^{-31} \text{ kg} \dots \text{(a.5.32) 電子の質量}$$

$$r \text{ m} \dots \text{(a.5.33) 水素原子内の原子核と電子間の距離}$$

$$v \frac{\text{m}}{\text{s}} \dots \text{(a.5.34) 図 a.5.1 のように原子核の周りを等速円運動している電子の速さ}$$

真空中の誘電率 (a.5.35) および仮定 I を使用して (a.5.36) を記述する. (a.5.36) にはニュートンの運動方程式を使用している. ニュートンの運動方程式 (a.5.36) の左辺は, 水素原子内の電子に作用している合力の大きさである. その合力は, 水素原子内の電子と原子核との相互作用で生じているクーロン力であるものと仮定する. ニュートンの運動方程式 (a.5.36) の右辺には, 電子の質量 (a.5.32) と電子の等速円運動の加速度の大きさを記述している. ここで記述する運動方程式 (a.5.36) では, 万有引力の法則は無視するものと仮定する. このように万有引力の法則を無視することで, (a.5.36) には原子核の質量は記述していない. ただし, 図 a.5.1 のような運動では, 原子核および電子はクーロンの法則および万有引力の法則での引力で互いを引き合っているも仮定 I および仮定 II のために電子は等速円運動を続ける.

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \dots \text{(a.5.35) 真空中の誘電率}$$

$$\frac{Ze \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \dots \text{(a.5.36) ニュートンの運動方程式——ニュートンの運動の第 2 法則——}$$

ここで, 仮定 I が成立するために, 仮定 II を使用する. 仮定 II では, 電子はエネルギーを吸収あるいは放出しないで, 等速円運動をし続けることができる. 定常状態の水素原子内で, その電子の運動エネルギーおよび静電的ポテンシャルエネルギーでの和を (a.5.37) で記述できる. 仮定 II では, その電子がエネルギーを吸収あるいは放出しなければエネルギー (a.5.37) が保存されて, (a.5.37) を定数として扱うことができる. ボーアの水素原子モデルの計算では, エネルギー (a.5.37) を束縛エネルギーとして扱う. その束縛エネルギーが電子を原子核に束縛しているものとして, ボーア理論では解釈する.

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 - \frac{Ze \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots \text{(a.5.37) 電子の持つ運動エネルギーおよび静電的ポテンシャルエネルギーの和}$$

(a.5.36) を使用して, (a.5.38) を導出できる. (a.5.38) を使用して, 電子の運動エネルギーを記述すると (a.5.39) になる. 電子の運動エネルギー (a.5.39) を束縛エネルギー (a.5.37) の右辺の第 1 項に代入すると (a.5.40) を記述できる. 束縛エネルギー (a.5.40) を (a.5.41) に整理することができる.

$$v^2 = \frac{r}{m_e} \cdot \frac{Ze \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{Ze^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot m_e} \dots \text{(a.5.38)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = \frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots \text{(a.5.39) 電子の持つ運動エネルギー}$$

$$E = \frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} - \frac{Ze^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = -\frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots (a.5.40)$$

$$E = -\frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots (a.5.41) \text{ 電子の持つ運動エネルギーおよび静電的ポテンシャルエネルギーの和}$$

ここで、仮定 I および仮定 II で保留にした束縛エネルギーと等速円運動の半径との関係について説明をする。束縛エネルギー (a.5.41) の右辺は電子の等速円運動の半径の値が異なると、束縛エネルギー (a.5.41) の左辺の値が異なる。このために、束縛エネルギー (a.5.41) の左辺の値が変化すると、(a.5.41) の右辺に記述してある電子の等速円運動の半径の値が変わることになる。その電子の等速円運動の半径が変わると、その電子の図 a.5.1 のような等速円運動で描く軌道となる円も変わることになる。このことに付け加えて、このように等速円運動の軌道が変わる際には、その電子は等速円運動を続けることはできない。このことが、定常状態の水素原子内の電子に生じることは、仮定 I に反する。このために、仮定 II を使用して、定常状態の水素原子内の電子には束縛エネルギー (a.5.41) の左辺の値は変化しないものとする。これらのことが仮定 I および仮定 II で保留にした説明である。

仮定 I では、定常状態の水素原子内の電子は等速円運動をしている。その等速円運動の周波数 (a.5.42) と等速円運動をしている質点の速さとの関係は (a.5.43) で記述できる。

$$\nu \text{ Hz} \dots (a.5.42)$$

$$\nu = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \dots (a.5.43) \text{ 等速円運動での質点の速さと周波数との関係式}$$

電子の速さの 2 乗 (a.5.38) と (a.5.43) を使用すると等速円運動の周波数 (a.5.44) を記述できる。一方、束縛エネルギー (a.5.41) を使用して、電子と原子核の間の距離 (a.5.33) は (a.5.45) で記述できる。ただし、距離 (a.5.45) の極限值が収束しないで発散する—— ∞ のこと。——ならば、実際の水素原子の大きさには一致しないことは明らかである。この場合では、古典理論から導出した束縛エネルギー (a.5.41) は定義区間 $0 < r < \infty$ とした関数である。その関数 (a.5.41) は実際の水素原子での束縛エネルギーの関数でないことは明らかである。

$$\nu = \frac{v}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{Ze \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3 \cdot m_e}} \dots (a.5.44)$$

$$r = -\frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E}, (E \neq 0) \dots (a.5.45)$$

電子と原子核の間の距離 (a.5.45) を等速円運動の周波数 (a.5.44) の右辺に代入すると、(a.5.46) を記述できる。等速円運動の周波数 (a.5.46) は (a.5.47) に記述できる。等速円運動の周波数 (a.5.47) は (a.5.48) に整理できる。

$$\nu = \sqrt{\frac{Z \cdot e \cdot e}{4 \cdot \pi^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3 \cdot m_e}} = \sqrt{\frac{Z \cdot e \cdot e}{4 \cdot \pi^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e} \cdot \frac{8^3 \cdot \pi^3 \cdot \epsilon_0^3 \cdot E^3}{Z^3 \cdot e^6}} \dots (a.5.46)$$

$$\nu = \sqrt{-\frac{1}{2 \cdot 8 \cdot m_e} \cdot \frac{64 \cdot 8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot E^3}{Z^2 \cdot e^4}} = \sqrt{-\frac{32 \cdot \epsilon_0^2 \cdot E^3}{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}} \dots (a.5.47)$$

$$\nu = \sqrt{-\frac{32 \cdot \epsilon_0^2 \cdot E^3}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}} \dots (a.5.48) \text{ 古典理論の周波数}$$

次に、仮定 IV を使用する。光子の光の周波数 (a.5.31) は前期量子論での実験式になる (a.5.1) を使用して、仮定 III から導出したものである。一方、ボーア理論の仮定 I および仮定 II を前提にして、等速円運動の周波数 (a.5.48) は古典理論を使用して導出したものである。仮定 IV では量子数 m が大きくなるに従って、光子の光の周波数 (a.5.31) は古典理論での周波数 (a.5.48) に近づくことになる。

$$\nu_{Lm} = c \times R_H \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m}\right)}{m \times (m+1)^2} \right\}, (\nu_{Lm} = \nu_{Lm+1m}) \dots (a.5.31) \text{水素原子が吸収あるいは放出する光量子の光の周波数}$$

次のように、電子の等速円運動の周波数と光の周波数が一致することは古典理論の電磁気学でも導出できる計算がある。電子から放出される電磁波については、ごく短い針金内に生じる周波数を持つ電流を考える。その振動電流の周波数は、その振動電流から放射される電磁波の周波数に一致する計算として提出されている。電磁波を吸収する電子の運動については、理論計算では次のようになる。電子に等速円運動させることができる電磁波を電子の存在する媒質に入射すると、その電磁波の周波数で電子が等速円運動をする。その電子は電磁波のエネルギーを吸収する。

仮定IVの対応原理を使用して、光量子の光の周波数 (a.5.31) および電子の等速円運動の周波数 (a.5.48) から (a.5.49) を仮定する。ただし、(a.5.49) の左辺に記述した量子数 (a.5.50) は仮定IVの対応の原理を使用するのに十分に大きな量子数であるものと仮定する。

$$c \times R_H \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m_{pr}}\right)}{m_{pr} \times (m_{pr} + 1)^2} \right\} = \sqrt{-\frac{32 \cdot \epsilon_0^2 \cdot E^3}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}} \dots (a.5.49) \text{仮定IVの対応の原理を使用}$$

$m_{pr} \dots (a.5.50)$ 仮定IVの対応の原理を使用するのに十分に大きな量子数

ここで、(a.5.49) を考察する。(a.5.49) の右辺の原子番号に (a.5.17) を代入して、エネルギーに (a.5.18) を代入する。そして、(a.5.51) の左辺のように周波数としての記号を与える。

$Z = 1 \dots (a.5.17)$ 水素原子の原子番号

$$E_m = -\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m^2} \dots (a.5.18)$$

$$\nu_{eq} = \sqrt{\frac{32 \cdot \epsilon_0^2}{m_e \cdot e^4} \cdot \left(\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m^2}\right)^3} \dots (a.5.51)$$

(a.5.31) および (a.5.51) の右辺に量子数を代入していく。量子数が大きくなるにつれて、(a.5.31) および (a.5.51) の値は近づいてくることがわかる。このことを表 a.5.2 で示した。ただし、表 a.5.2 では量子数 (a.5.50) としては計算していない。

m	ν_{Lm}	ν_{eq}	$\nu_{eq} - \nu_{Lm}$
100	6679 711 766.544 23	6579 683 922.499 62	-100 027 844.044 60
1 000	6589 566.623 71	6579 683.921 96	-9882.701 75
100 000	6.579 782 61	6.579 683 92	-0.000 098 69
1 000 000	0.006 579 693 79	0.006 579 683 92	-0.986×10^{-8}
10 000 000	$0.657 968 490 8 \times 10^{-5}$	$0.657 968 392 1 \times 10^{-5}$	-0.986×10^{-12}
100 000 000 000	$0.657 968 392 209 8 \times 10^{-17}$	$0.657 968 392 196 6 \times 10^{-17}$	-0.131×10^{-27}

表 a.5.2 量子数 m 、周波数 ν_{Lm} および周波数 ν_{eq} の対応関係を示す計算例

量子数 (a.5.50) を束縛エネルギー (a.5.18) に代入して (a.5.52) を記述できる。仮定IIおよび仮定IIIを使用

して、仮定IVを使用して記述した (a.5.49) に束縛エネルギー (a.5.52) を代入して (a.5.53) を記述する.

$$E_m = -\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m_{Pr}^2} \dots (a.5.52)$$

$$c \times R_H \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m_{Pr}}\right)}{m_{Pr} \times (m_{Pr} + 1)^2} \right\} = \sqrt{-\frac{32 \cdot \varepsilon_0^2}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4} \cdot \left(-\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m_{Pr}^2}\right)^3} \dots (a.5.53)$$

ここでは、(a.5.53) を書き直してリュードベリ定数を理論的に導出することを試みる. 仮定IVの対応の原理では (a.5.53) から別の式に書き直した場合には、その書き直された式が成立することは保証していない. そのように書き直された式が成立することを仮定IVで保証していないことを前提にして以下のようにリュードベリ定数の導出の考察をする. 束縛エネルギー (a.5.53) の両辺を2乗して、(a.5.54) を記述する. (a.5.54) の右辺を (a.5.55) に記述する.

$$(c \times R_H)^2 \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m_{Pr}}\right)}{m_{Pr} \times (m_{Pr} + 1)^2} \right\}^2 = -\frac{32 \cdot \varepsilon_0^2}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4} \cdot \left(-\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m_{Pr}^2}\right)^3 \dots (a.5.54)$$

$$(c \times R_H)^2 \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m_{Pr}}\right)}{m_{Pr} \times (m_{Pr} + 1)^2} \right\}^2 = \frac{32 \cdot \varepsilon_0^2}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4} \cdot \left(\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m_{Pr}^2}\right)^3 \dots (a.5.55)$$

(a.5.55) を (a.5.56) に書き直す. (a.5.56) の両辺を整理すると、(a.5.57) になる.

$$(c \times R_H)^2 \times \left\{ \frac{\left(2 + \frac{1}{m_{Pr}}\right)}{m_{Pr} \times (m_{Pr} + 1)^2} \right\}^2 \cdot \frac{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}{32 \cdot \varepsilon_0^2} = \frac{h^3 \cdot c^3 \cdot R_H^3}{m_{Pr}^6} \dots (a.5.56)$$

$$\frac{\left(2 + \frac{1}{m_{Pr}}\right)^2}{m_{Pr}^2 \times (m_{Pr} + 1)^4} \cdot \frac{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}{32 \cdot \varepsilon_0^2} = \frac{h^3 \cdot c \cdot R_H}{m_{Pr}^6} \dots (a.5.57)$$

(a.5.57) から水素原子のリュードベリ定数を導出すると、(a.5.58) を記述できる. 量子数 (a.5.50) は (a.5.59) を満足することは明らかである. このことから、水素原子のリュードベリ定数 (a.5.58) は (a.5.60) の近似の式に記述できる. 近似の式 (a.5.60) は (a.5.61) に整理できる. ただし、既に説明したように仮定IVでは、(a.5.58) が成立することは保証されない.

$$R_H = \frac{m_{Pr}^6}{h^3 \cdot c} \cdot \frac{\left(2 + \frac{1}{m_{Pr}}\right)^2}{m_{Pr}^2 \times (m_{Pr} + 1)^4} \cdot \frac{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}{32 \cdot \varepsilon_0^2} \dots (a.5.58)$$

$$m_{Pr} \gg 1 \dots (a.5.59)$$

$$R_H \approx \frac{m_{Pr}^6}{h^3 \cdot c} \cdot \frac{4}{m_{Pr}^6} \cdot \frac{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}{32 \cdot \varepsilon_0^2} \dots (a.5.60)$$

$$R_H \approx \frac{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} \dots (a.5.61)$$

(a.5.61) の右辺を (a.5.62) のように記述する. (a.5.62) の右辺の原子番号に (a.5.17) を代入して, (a.5.63) のように記述する. (a.5.63) の左辺 (a.5.64) はボーア理論で対応の原理を使用して導出したリュードベリ定数であるが, 一般にはリュードベリ定数と呼んで (a.5.65) の定数を与える. (a.5.65) の定数は CODATA で発表されたものを示した.

$$R_{Z\infty} = \frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} \dots (a.5.62)$$

$Z = 1 \dots$ (a.5.17) 水素原子の原子番号

$$R_\infty = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} \dots (a.5.63)$$

$R_\infty \dots$ (a.5.64) ボーア理論で対応の原理を使用して導出したリュードベリ定数

$R_\infty = 10\,973\,731.568\,527 \text{ m}^{-1} \dots$ (a.5.65) CODATA で発表したリュードベリ定数

ここで, (a.5.62) のリュードベリ定数を (a.5.18) の右辺の水素原子のリュードベリ定数の代わりに代入すると, 近似の式 (a.5.66) を記述できる. 近似の式 (a.5.66) の右辺を整理すると (a.5.67) になる. 近似の式 (a.5.67) の右辺を (a.5.68) で記述する.

$$E_m = -\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m^2} \dots (a.5.18)$$

$$E_m \approx -\frac{h \cdot c}{m^2} \cdot \frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} \dots (a.5.66)$$

$$E_m \approx -\frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{m^2} \dots (a.5.67)$$

$$E_{mZ\infty} = -\frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{m^2} \dots (a.5.68)$$

(a.5.17) を (a.5.68) の右辺に代入して, (a.5.69) に記述する. 水素原子内の束縛エネルギー (a.5.18) は (a.5.69) とは (a.5.70) の関係を持つ. 近似の式 (a.5.70) では, (a.5.69) は束縛エネルギーの近似の値を示すものと考えることができる.

$$E_{m\infty} = -\frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{m^2} \dots (a.5.69)$$

$$E_m \approx E_{m\infty} \dots (a.5.70)$$

特に, 量子数 (a.5.71) を (a.5.69) に代入した (a.5.72) の絶対値は水素原子のイオン化エネルギーに十分に一致することの報告がある. このイオン化のエネルギーは次のようなものである. ここで考えている水素原子はひとつの電子しか持たないので, その水素原子内からひとつの電子を取り出すことで水素原子は正の符号をもつ陽子のみとなる. この陽子のみとなった水素原子は正の符号にイオン化していることになる. このように, 水素原子をイオン化するのに必要なエネルギーを水素原子のイオン化エネルギーと呼ぶ. (a.5.72) の絶対値が水素原子をイオン化するのに必要なイオン化エネルギーであることは次のように一般には解釈する. (a.5.69) の量子数が ∞ に向かいどこまでも大きくなるように極限值を計算すると (a.5.73) になる. このために, (a.5.74) を計算することができ (a.5.74) は (a.5.72) の絶対値に一致することになる. (a.5.73) の場合では電子は束縛されていないものと解釈できる. このように電子が束縛されていない状態では, イオン化した水素原子とひとつの電子が

存在するものと考えることができる。このために、(a.5.72) の絶対値をイオン化エネルギーとして扱うことができる。ただし、専門書によって負号の扱いは異なるので必ずしも (a.5.72) の絶対値でイオン化エネルギーを表示するものとは限らない。水素原子の量子数 1 の状態の束縛エネルギー (a.5.75) の絶対値にイオン化エネルギーは等しいものと考え、束縛エネルギーの近似の値を示す (a.5.72) の絶対値を水素原子のイオン化エネルギーとして扱うことになる。ただし、測定値が十分に一致していることを前提にしている。量子数 1 の水素原子の束縛エネルギーの状態を基底状態と呼ぶ。

$$m = 1 \dots (a.5.71)$$

$$E_{1\infty} = -\frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \dots (a.5.72) \text{ 水素原子の基底状態の束縛エネルギーの近似の式}$$

$$E = \lim_{m \rightarrow \infty} E_{m\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{m^2} \right) = 0 \dots (a.5.73)$$

$$E - E_{1\infty} = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \dots (a.5.74)$$

$$E_1 = -h \cdot c \cdot R_H \dots (a.5.75)$$

プランク定数 (a.5.76) を使用して、水素原子の基底状態の束縛エネルギー (a.5.75) を計算すると (a.5.77) になる。プランク定数 (a.5.76) は CODATA で発表している値である。一方、水素原子の基底状態の束縛エネルギーの近似の式 (a.5.72) を計算すると (a.5.78) になる。(a.5.77) と (a.5.78) の値との差を計算すると (a.5.79) になる。一般には、(a.5.79) の値程度に近い場合には、(a.5.72) を水素原子の基底状態の束縛エネルギーとして扱う場合もある。実験値では、文献 10 に水素原子のイオン化エネルギーとして (a.5.80) の値——文献 10 の表示とは単位は異なる。——が表示されている。一般の物理学指導では (a.5.80) と (a.5.77) のような値を比較するとボーア理論の水素原子の基底状態の束縛エネルギーは実験に一致するものとして、紹介されるものと著者は判断する。

$$h = 6.62606896 \times 10^{-34} \text{ J s} \dots (a.5.76) \text{ プランク定数}$$

$$E_1 = -21.79871970 \times 10^{-19} \text{ J} \dots (a.5.77) \text{ ボーア理論の水素原子の基底状態での束縛エネルギーの理論値}$$

$$E_{1\infty} = -21.78685420 \times 10^{-19} \text{ J} \dots (a.5.78) \text{ ボーア理論の水素原子の基底状態での束縛エネルギーの近似値}$$

$$E_{1\infty} - E_1 = -0.0118655 \times 10^{-19} \text{ J} \dots (a.5.79)$$

$$21.68 \times 10^{-19} \text{ J} \dots (a.5.80) \text{ 実験値}$$

定常状態の水素原子内での電子と原子核との間の距離 (a.5.45) を計算する。仮定 I および仮定 II を使用すると、電子は原子核の周りを、図 a.5.1 のように等速円運動を続けることができる。(a.5.81) は水素原子内の電子が定常状態で図 a.5.1 のような等速円運動の軌道になる円の半径を意味するものとする。その円の中心は原子核の中心とする。このことから、束縛エネルギー (a.5.68) をとる軌道を電子が等速円運動しているものとして、(a.5.68) を (a.5.45) の右辺に代入すると (a.5.82) を記述できる。距離 (a.5.82) の右辺を整理すると (a.5.83) になる。(a.5.83) の右辺を (a.5.84) に記述する。(a.5.84) はボーア理論の仮定 I ~ 仮定 IV を使用した等速円運動で描く円軌道の円の半径を意味する。

$$r = -\frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot E} (E \neq 0) \dots (a.5.45) \text{ ボーア理論の仮定 I を使用した等速円運動の軌道になる円の半径}$$

$$r_{zm} \dots (a.5.81) \text{ ボーア理論の仮定 I および仮定 II を使用した等速円運動の軌道になる円の半径}$$

$$E_{m\infty} = -\frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{m^2} \dots (a.5.68)$$

$$r_{Zm} \approx \frac{Z \cdot e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2}{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4} \cdot m^2 \dots (a.5.82)$$

$$r_{Zm} \approx \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{m_e \cdot \pi \cdot Z \cdot e^2} \cdot m^2 \dots (a.5.83)$$

$$r_{Zm\infty} = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{m_e \cdot \pi \cdot Z \cdot e^2} \cdot m^2 \dots (a.5.84)$$

ボーア理論の仮定 I ~ 仮定 IV を使用した等速円運動の軌道になる円の半径

水素原子の原子番号 (a.5.17) を (a.5.84) の右辺に代入すると, (a.5.85) になる. さらに, 量子数 (a.5.71) を (a.5.85) に代入すると, (a.5.86) になる. 定常状態の水素原子内の電子と原子核との距離 (a.5.86) はボーア半径と呼ばれるものである. CODATA で発表しているボーア半径は (a.5.87) になる.

$$r_{m\infty} = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{m_e \cdot \pi \cdot e^2} \cdot m^2 \dots (a.5.85)$$

$$r_B = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{m_e \cdot \pi \cdot e^2} \dots (a.5.86)$$

ボーア半径

$$r_B = 0.52917720859 \times 10^{-10} \text{ m} \dots (a.5.87)$$

(a.5.85) を使用すると, (a.5.88) のように発散する. (a.5.88) では次のように距離 $r_{m\infty}$ を考えている. 任意の実数 c —— (a.5.89) のこと. —— に対して (a.5.90) のように自然数 N が存在して (a.5.91) のように任意の自然数 m が存在する (a.5.92) を満足する距離 $r_{m\infty}$ になる. この (a.5.92) のような半径 $r_{m\infty}$ は, 実際の水素原子の大きさには一致しないことは明らかである. この計算からでは, 古典理論の束縛エネルギー (a.5.41) は実際の水素原子での束縛エネルギーの関数ではないものと解釈できる.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{m\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{m_e \cdot \pi \cdot e^2} \cdot m^2 = +\infty \dots (a.5.88)$$

$$\forall c \in \mathbf{R} \dots (a.5.89)$$

$$\exists N \in \mathbf{N} \dots (a.5.90)$$

$$\forall m > N \dots (a.5.91)$$

$$c < r_{m\infty} \dots (a.5.92)$$

$$E = -\frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots (a.5.41)$$

電子の持つ運動エネルギーおよび静電的ポテンシャルエネルギーの和

(a.5.18) は実験式 (a.5.1) および仮定 III を使用して導出したものである. その導出過程では, 仮定 III で水素原子モデル内の電子の等速円運動を仮定している. その仮定 III での等速円運動が成立しなくても (a.5.1) および (a.5.21) が成立するならば, (a.5.24) から (a.5.18) を導出できる. このような解釈では, (a.5.18) は (a.5.41) とは異なるものと扱える. そして, (a.5.18) に実際の水素原子の束縛エネルギーが一致するものとした仮定を否定することにはならない. このような (a.5.18) の仮定では, 水素原子内での電子は仮定 I のように等速円運動をする必要はない.

$$E_m = -\frac{h \cdot c \cdot R_H}{m^2} \dots (a.5.18)$$

$$h \cdot \nu_{Lm} = E_n - E_m, (E_n > E_m) \dots (a.5.21)$$

$$E_n - E_m = \left(-\frac{h \cdot c \times R_H}{n^2} \right) - \left(-\frac{h \cdot c \times R_H}{m^2} \right) \dots (a.5.24)$$

(a.5.82) ~ (a.5.86) で示すようにボーア理論での定常状態の水素原子内の原子核と電子との間の距離は, 量

子数 (a.5.3) で決定する不連続な値を示す。このために、ボーア理論では定常状態の水素原子内での電子の持つ運動エネルギー (a.5.39) は不連続な値になることは明らかである。同様に、定常状態の水素原子内での電子の静電的ポテンシャルエネルギー (a.5.93) は不連続な値を示すことは明らかである。

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = \frac{Ze^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots (a.5.39) \text{電子の持つ運動エネルギー}$$

$$-\frac{Ze^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \dots (a.5.93) \text{静電的ポテンシャルエネルギー}$$

ニュートンの運動方程式 (a.5.36) では、電子が等速円運動することを記述した。(a.5.36) には原子核の質量 (a.5.94) を記述していない。運動方程式 (a.5.36) では原子核の質量 (a.5.94) がどのような正の値でも (a.5.36) の両辺の値に影響はないものと扱うことができる。

$$\frac{Ze \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \dots (a.5.36) \text{ニュートンの運動方程式——ニュートンの運動の第2法則——}$$

$m_p \dots (a.5.94)$ 原子核の質量

一方、図 a.5.1 では、原子核は等速円運動の円軌道の中心に存在し続ける。本書の第2回では、図 a.5.1 の原子核は慣性座標系内に静止を続けるものとして扱う。その慣性座標系内では、このように静止している原子核の加速度は (a.5.95) であるものと扱うことができる。原子核の加速度を (a.5.95) で仮定すると、どのような正の実数を原子核の質量 (a.5.94) として扱っても、その原子核に作用する運動方程式 (a.5.96) で記述できる合力は (a.5.97) のように零になる。このことでは、その原子核は等速円運動の円軌道の中心に存在し続けるものと考察できる。第3回では、そのような原子核の質量 (a.5.94) についての考察もする。

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \dots (a.5.95)$$

$$\mathbf{F} = m_p \cdot \mathbf{a} \dots (a.5.96) \text{ニュートンの運動方程式で記述した原子核に作用する合力}$$

$$\mathbf{F} = m_p \cdot \mathbf{a} = m_p \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \dots (a.5.97)$$

参考文献

- 1) ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY, KENNETH S. KRANE, 1992 : PHYSICS 4th Edition Volume2, John Wiley & Sons, Inc., pp.594-601, pp.611-612, pp.651-654, p.1017, pp.1069-1074.
- 2) 金原寿郎編『基礎物理学 上巻』, (裳華房, 1988年), pp.87-88, pp.98-100.
- 3) Bureau international des poids et mesures : The International System of Units(SI) 8th edition 2006, pp.112-113. (http://www.bipm.org/utis/common/pdf/si_brochure_8.pdf)
- 4) 訳・監修(独)産業技術総合研究所 計量標準総合センター : 国際文書第8版(2006) 国際単位系 (SI) 日本語版
- 5) Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, and David B. Newell, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8420, USA (Dated: December 28, 2007) : CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006, p.4, pp.6-7, p.95.
(<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/codata.pdf>)
- 6) [富岡和人, “特殊相対性理論の速度の変換”, p.2.](#)
- 7) ROBERT RESNICK, 1968: INTRODUCTION TO SPECIAL RELATIVITY, John Wiley & Sons, Inc., p.111.

- 8) 小玉英雄：『物理学基礎シリーズ6 相対性理論』，(倍風館，1997年)，p.41.
- 9) ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY, 1992 : Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory
SECOND EDITION A Pearson Education Print on Demand Edition, Macmillan Publishing Company, pp.240-255.
- 10) 金原寿郎編：『基礎物理学 下巻』，(豪華房，1988年)，pp.154-157, p.224, p.271.
- 11) [富岡和人，“AL COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006”，循環系に関する研究報告，\(2006-12-27\)，p.31.](#)
- 12) [富岡和人，“AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008”，循環系に関する研究報告，\(2008-12-25\)。](#)
- 13) [富岡和人，“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回”](#)
- 14) [富岡和人，“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回”，p.3, p.11.](#)
- 15) [富岡和人，“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回”](#)
- 16) [富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第一回”](#)
- 17) [富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第三回”](#)
- 18) [富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第四回”](#)
- 19) [富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第五回”，pp.7-9, pp.36-38, pp.103-106.](#)
- 20) [富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 Option”](#)

免責事項

A LIFFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーが A LIFFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他 A LIFFE COM.の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任は負いません。

本資料は情報提供を目的として作成したものです。本資料の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.および A LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任は負いません。

著作権

Copyright © 2007–2009 富岡和人 All rights reserved.

文書のプロパティの文書に関する制限の概要の表示内容については著者の許可のないものとします。

本ドキュメントのバックアップのコピーは許可します。

本ドキュメントを私的利用の範囲内で印刷することは許可します。

電位の簡単な入門 2007 第2回 とみおかかずひと 富岡和人著

作成日：2007年03月03日

発行日：2007年03月03日

改訂発行日：2007年04月09日

改訂発行日：2007年11月03日

改訂発行日：2007年11月08日

改訂発行日：2008年07月18日

改訂発行日：2008年07月18日

改訂発行日：2008年08月22日

改訂発行日：2008年09月21日

改訂発行日：2008年10月28日

改訂発行日：2009年01月27日

改訂発行日：2009年07月06日

改訂発行日：2009年07月23日

改訂発行日：2009年12月24日

ホームページ

<http://www.alifecom.info/>

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/>

<http://book.geocities.jp/alifecominfo/>

<http://alifecominfo.aikotoba.jp/>

電気の回路のページ

http://www.alifecom.info/circuit_analysis.htm

http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/circuit_analysis.htm

http://book.geocities.jp/alifecominfo/circuit_analysis.htm

http://alifecominfo.aikotoba.jp/circuit_analysis.htm