

循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007

第 1 回/全 3 回

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

1. まえがき

本初級講座では、文献 1 に含まれている循環系の回路モデルの初等的な箇所の簡単な説明をする。本初級講座の全回数は 3 回となる。本講座で使用する回路要素は著者が独自に定義したものである。これらの回路要素のなかにコンプライアンスがある。2007 年現在の循環系の回路モデルに使用されているコンプライアンスに関する数学理論や物理学理論と整合しない部分についても紹介する。さらに、これらの数学理論や物理学理論の部分と本講座の回路要素のコンプライアンスは整合することを説明する。

本講座の第 1 回は循環系の回路モデルの物理的モデルと回路要素となる数学的モデルについて説明する。コンプライアンスの分母が零になる問題について説明する。第 1 回で説明する内容とは別の問題で、コンプライアンスの分母が零になる問題は第 3 回でも説明する。

第 2 回は循環系の回路モデルから微分方程式系を導出する。この微分方程式系を導出する際に、循環系の回路モデルの物理的モデルを電気の線形回路網と見なしてキルヒホッフの法則を使用する。循環系の回路モデルを電気回路網に見なす際には、圧力を電位に見なすことで生じる問題が存在する。その問題では次のように説明できる。コンプライアンスは心臓および血管の特性を示す評価指標として扱うことができる。心臓および血管がコンプライアンスで示す特性を、その心臓および血管の性能として持っても血液の移動が生じることを保証するものではない。血液が移動するには、その血液に力を作用させる必要がある。簡単な説明では、その力は心臓および血管内の圧力差から生じるものと説明できる。その圧力は心臓あるいは血管から生じさせる必要があり、血液のみで生じる圧力ではない。心臓あるいは血管が収縮および弛緩——あるいは拡張——することで説明できる内圧はコンプライアンスを心臓および血管が特性として示すのみでは生じるものではない。この問題の説明をする。

第 3 回では第 2 回で導出した微分方程式系の解の特性について説明する。第 3 回で掲載する解の特性は左心室の容積と内圧の測定値と完全に一致したものである。その測定値は小数点以下一桁までの精度である。この解の特性では安定性の考察をする。第 3 回では、コンプライアンスの分母が零になる問題およびインダクタンスと呼ぶ循環系の回路モデルの回路素子についての説明をする。回路素子であるインダクタンスは、第 2 回で導出した微分方程式系を導出する際には使用していない。インダクタンスは第 2 回で導出した微分方程式系を改善させるために導入する回路素子である。

文献 1 は著者の約 10 年間での研究成果の一部を発表した論文である。文献 2 は 2008 年に著者が発表した心臓血管系の回路モデルの論文である。その論文では、血流量について研究成果を論じている。文献 3 は、著者が循環系の回路モデルの参考資料として発行した電気の回路論の基礎について説明している文献である。文献 3 での説明を参考にして、著者が独自に本書で使った血流量およびインダクタンスを文献 2 で定義した。本書の血流量の説明で使った微分法および積分法は文献 4 のものを使用し

た. 文献 2 および文献 3 での数学でも, 文献 4 の指導を使用している. 著書の経験では, 特に, 文献 4 の微分法は日本国内の大学課程で使用している一般的な微分法とは異なるので, 文献 4 を表示した.

A LIFE COM.

目次

1. まえがき	1
目次	3
2. 循環系の回路モデルの物理的モデル	4
3. 循環系の回路モデルの数学的モデル	5
3.1. 血流量の定義	5
3.2. 時変型コンプライアンスの定義	7
3.3. 不時変型の流れの抵抗の定義	7
3.4. 不時変型コンプライアンスの定義	8
3.5. プレッシュホロワ	8
3.6. 内圧制御内圧源	9
3.7. インダクタンスの定義	9
4. あとがき	10
参考文献	10
免責事項	11
著作権	11

2. 循環系の回路モデルの物理的モデル

本初級講座では、図 2.1 が循環系の回路モデルの物理的モデルとなる。図 2.1 の各部のヒトの心臓-血管系の部位との対応関係は図 2.1 の右に掲載している。図 2.1 の流れの抵抗は不時変型集中定数の回路要素である。図 2.1 の心臓部は時変型コンプライアンスを使用している。心臓部の心室部の時変型コンプライアンスにはプレッシャホロワと呼んでいる回路を接続している。この心室部のように時変型コンプライアンスとプレッシャホロワを接続した回路を内圧制御内圧源と呼ぶことにする。プレッシャホロワと内圧制御内圧源は著者が独自に循環系の回路モデルに与えたものである。心臓部には入力端子がある。この入力端子の入力はプレッシャホロワの出力となる。このプレッシャホロワの出力は心室部の内圧になる。図 2.1 の血管部には不時変型コンプライアンスを使用している。図 2.1 の BC1 は静脈弁に対応している。この BC1 を波形操作回路として扱う場合は、著者が独自に循環系の回路モデルに与えたものである。

本講座ではヒトの心臓周期の時間関係図 2.2 に対応させて図 2.1 のスイッチを開閉する。心臓周期の心室の弛緩期と収縮期に分けて、このスイッチの開閉をする。本講座の第 2 回で導出する微分方程式系に、このスイッチの開閉は影響する。ただし、最終回の第 3 回で数値解析する際には心室の収縮期の時間は 0.32 s 間とした。

図 2.1 で、心臓弁の特性を表現するにはスイッチのみでは十分でない。スイッチが閉じている方の一番近くの流れの抵抗と心室の内圧でも、図 2.1 の心臓弁の特性を表現している。ただし、本講座での心臓弁の特性とは、心室から流れる血液量と心室内圧の制御を行う特性のことである。

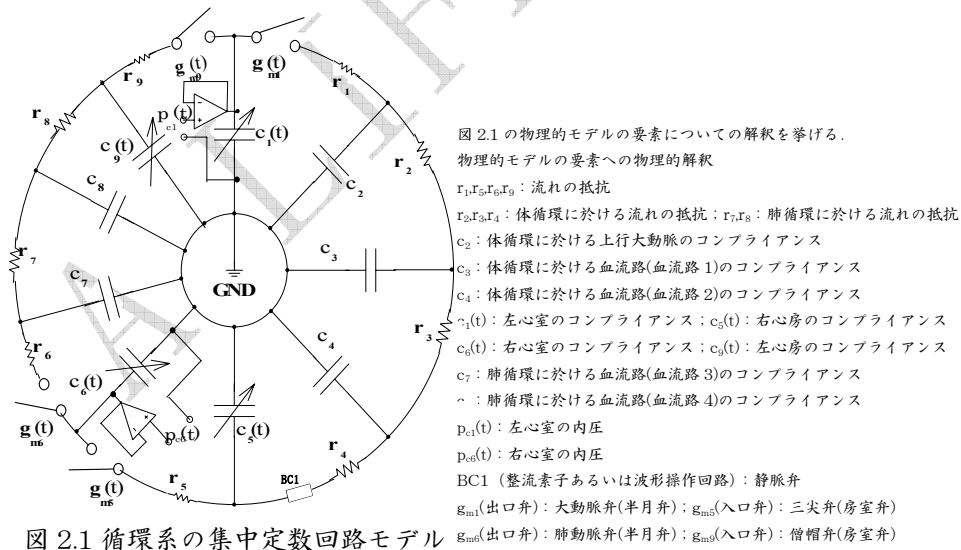


図 2.1 循環系の集中定数回路モデル

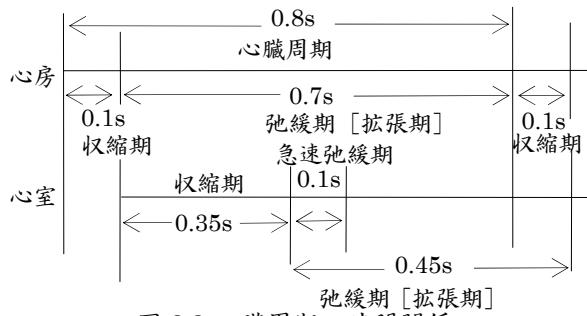


図 2.2 心臓周期の時間関係

3. 循環系の回路モデルの数学的モデル

本章のすべての数学的モデルは著者が独自に定義したものである。本章の関数の変数と成る t は時間を意味する。本講座の第 2 回で、本章の回路要素の数学的モデルを使って図 2.1 の物理的モデルから微分方程式系を導出する。

3.1. 血流量の定義

3 章 1 節では、図 3.1.1 のような血液の流れる路を仮定する。この血液の流れる路に血流が生じているものと仮定する。さらに、この血液の流れる路に直交断面積を仮定する。血流となる血液の流れる方向は、その直交断面積に直交しているものとする。そして、その直交断面積を幾つかの直交断面積に分割する。図 3.1.1 の直交断面積は、そのように分割した直交断面積である。血流の方向が変化することで、直交断面積も変化することになる。

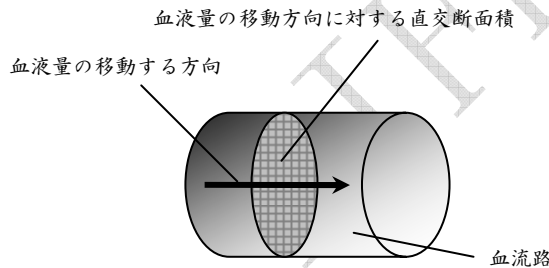


図 3.1.1 血流量の定義

3 章 1 節では、図 3.1.1 のようなそれぞれの直交断面積での血流に血流量と呼ぶ量を導入する。その血流量を導入する際に正味の血液量 (3.1.1) を導入する。正味の血液量 (3.1.1) は実数の値になる。(3.1.1) の独立変数 (3.1.2) は時点を意味する実数の変数である。正味の血液量 (3.1.1) は、或る直交断面積での或る血流量で与えたものである。そして、(3.1.1) は血流路の或る直交断面積を或る時間内——時の長さのことである。——に通過した正味の血液量とする。正味の血液量 (3.1.1) は連続な関数であるものと仮定する。

$$q(t) \text{ ml}, (t \in E) \dots (3.1.1)$$

$$t \dots (3.1.2)$$

正味の血液量 (3.1.1) の微分係数 (3.1.3) を血流量と呼ぶことにする。血流量 (3.1.3) では、時点 (3.1.2) は (3.1.1) が定義された区間に固定されたひとつの点として扱う。時間 (3.1.4) ——時の長さのことである。——が、血流量 (3.1.3) での変数となる。血流量 (3.1.3) の右辺の正味の

血液量は微分可能な関数である.

$$q'(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(t+h) - q(t)}{h} \frac{\text{ml}}{\text{s}}, (t, t+h \in E) \dots (3.1.3) \text{ 血流量の定義}$$

$$h \dots (3.1.4)$$

正味の血液量 (3.1.1) に (3.1.3) が成立するならば, 血流量 (3.1.3) での微分を与えることができる. 血流量 (3.1.3) での正味の血液量の微分を (3.1.5) で定義する. 同様に, 時間 (3.1.4) を使用して, 微分係数 (3.1.6) での時点 (3.1.2) の微分を (3.1.7) で定義する. 時間の微分 (3.1.7) を正味の血液量の微分 (3.1.5) の右辺に代入すると (3.1.8) を記述できる.

$$dq(t) \equiv q'(t) \cdot h \dots (3.1.5)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t+h-t}{h} = 1, (t, t+h \in E) \dots (3.1.6)$$

$$dt \equiv h \dots (3.1.7)$$

$$dq(t) = q'(t) \cdot dt \dots (3.1.8)$$

時点 (3.1.2) の微分が (3.1.9) を満足することを仮定する. (3.1.9) が成立すると, 正味の血液量の微分 (3.1.8) から血流量 (3.1.10) を記述できる. 血流量 (3.1.10) の左辺を (3.1.11) で記述する. (3.1.11) を使用すると, 血流量 (3.1.10) は (3.1.12) に書き直すことができる.

$$dt \neq 0 \dots (3.1.9)$$

$$q'(t) = \frac{dq(t)}{dt}, (dt \neq 0) \dots (3.1.10)$$

$$i(t) = q'(t) \dots (3.1.11)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, (dt \neq 0) \dots (3.1.12)$$

区間 (3.1.13) 内で血流量 (3.1.12) が連続な関数であることを仮定する. 血流量 (3.1.12) から正味の血液量 (3.1.14) を記述できる. 正味の血液量 (3.1.14) を微分すると血流量 (3.1.12) になる. 積分 (3.1.15) は, 被積分関数である血流量 (3.1.12) を定義した直交断面積を積分区間の上端および下端で与える時間内に通過した正味の血液量である.

$$[a, b] \dots (3.1.13)$$

$$q(t) = \int_a^t i(x) dx + q(a), (x, t \in [a, b], q(a) = \text{const.}) \dots (3.1.14)$$

$$q_s(t) = \int_a^t i(x) dx, (x, t \in E) \dots (3.1.15)$$

正味の血液量を (3.1.14) で与えることで, 正味の血液量が負の符号を持つことになる. 一般で使われている血液量は体積として扱われる. 正味の血液量は負の符号を持つことから体積ではないものと扱える.

文献 3 で著者が独自に与えた電流の定義を参考にして著者が文献 2 で与えた血流量が本節での血流量である. そして, 使用した微分法および積分法は文献 4 のものを使用した.

3.2. 時変型コンプライアンスの定義

(3.2.1) が時変型コンプライアンスの定義である。(3.2.1) の分母は 0 mmHg に対する心臓あるいは血管壁に作用する内圧である。日本の一般的な環境では (3.2.1) の分母はゼロになることはない。一般には (3.2.1) の分母の内圧は (3.2.2) の左辺で与える。(3.2.1) の分子は体積あるいは容積である。(3.2.2) の右辺の第一項は血圧である。(3.2.2) の右辺の第二項は大気圧である。(3.2.2) の左辺は血圧である。血圧は大気圧に対する内圧である。血圧が各部位で与えられる際に、(3.2.3) の右辺からも分かるがその値は正值のみでなく負値にもなる。一般的に、血圧が負値にもなる部位は右心房である。右心房では、血圧は正值も負値にもなることから血圧は零にもなる。もし、(3.2.1) の分母を血圧で定義すると右心房のように分母が零になってしまう問題を持つことになる。(3.2.2) の左辺は実際に心臓あるいは血管内で作用している圧力である。しかし、血圧は大気圧をその内圧から引いたものである。このために、一般的に実際の心臓あるいは血管内に作用している圧力の値を完全に血圧の値と等しいとは著者は考えない。

(3.2.1) の分母を血圧として計算している文献も著者には覚えがある。しかし、このような場合は上述のように分母が零になってしまう問題がある。また、心臓あるいは血管の特性として、2007 年現在の著者の研究では (3.2.1) よりも適したものと解明していない。

$$c(t) \equiv \frac{q(t)}{p(t)} \frac{\text{ml}}{\text{mmHg}}, (p(t) \neq 0) \dots (3.2.1)$$

$$p(t) = p_v(t) + p_0(t) \text{ mmHg} \dots (3.2.2)$$

$$p_v(t) = p(t) - p_0(t) \text{ mmHg} \dots (3.2.3)$$

3.3. 不時変型の流れの抵抗の定義

図 3.3.1 を本書の流れの抵抗の記号として使用する。図 3.3.1 のひとつの端を P 点として、他方の端を Q 点とする。



図 3.3.1 流れの抵抗の記号

(3.3.1) は不時変型の流れの抵抗である。(3.3.1) の右辺の分子に記述した圧力差は流れの抵抗の両端の圧力差である。血流量 (3.3.2) は図 3.3.1 の流れの抵抗に生じる血流量である。(3.3.1) の右辺の分母は血流量 (3.3.2) の左辺である。血流量 (3.3.2) には (3.3.3) を仮定している。そして、不時変型の流れの抵抗 (3.3.1) は定数として定義している。

$$r \equiv \frac{p_p(t) - p_q(t)}{i(t)} \frac{\text{mmHg} \cdot \text{s}}{\text{ml}}, (p_p(t) \geq p_q(t)) \dots (3.3.1)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \frac{\text{ml}}{\text{s}} \dots (3.3.2)$$

$$i(t) \neq 0 \dots (3.3.3)$$

ヒトの体内で得た (3.3.1) の分母および分子の関数から定数になる (3.3.1) の左辺の不時変型流れの抵抗を得ることは難しい。このために、本講座の第 3 回の数値解析では (3.3.4) ~ (3.3.6) で不時変型流れの抵抗を概算する。(3.3.4) は血流量 (3.3.2) の時間での平均値を算出している。(3.3.5)

は図 3.3.1 の流れの抵抗の P 点あるいは Q 点での圧力の時間での平均値を算出している。(3.3.4) および (3.3.5) の平均値を使用して、(3.3.1) から導出した流れの抵抗が (3.3.6) である。

$$\bar{i}(t) = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_2} i(t) dt \dots (3.3.4)$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_2} p(t) dt \dots (3.3.5)$$

$$r = \frac{\bar{p}_P(t) - \bar{p}_Q(t)}{\bar{i}(t)} \dots (3.3.6)$$

3.4. 不時変型コンプライアンスの定義

(3.4.1) は不時変型コンプライアンスである。(3.4.1) の分子と分母は (3.1) と同様である。(3.4.1) から (3.4.2) が導出できる。(3.4.3) は (3.4.1) の分子の時間での平均値である。(3.4.3) の右辺に (3.4.2) を代入する。さらに、(3.4.4) を使用すると (3.4.5) を導出できる。(3.4.4) は不時変型コンプライアンス (3.4.1) の分母の時間での平均値である。(3.4.5) から不時変型コンプライアンス (3.4.6) を導出できる。

$$c = \frac{q(t)}{p(t)} \frac{\text{ml}}{\text{mmHg}}, (p(t) \neq 0) \dots (3.4.1)$$

$$q(t) = c \times p(t) \dots (3.4.2)$$

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_2} q(t) dt \dots (3.4.3)$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_2} p(t) dt \dots (3.4.4)$$

$$\bar{q}(t) = c \times \bar{p}(t) \dots (3.4.5)$$

$$c = \frac{\bar{q}(t)}{\bar{p}(t)}, (\bar{p}(t) \neq 0) \dots (3.4.6)$$

3.5. プレッシュアホロワ

図 3.5.1 はプレッシュアホロワの記号である。プレッシュアホロワは図 2.1 の心室部に接続している。プレッシュアホロワの入力端子の内圧は出力端子の内圧に等しい。式で記述すると (3.5.1) になる。図 3.5.1 の入力端子は左側の端子間になる。この入力端子は正相入力端子になる。プレッシュアホロワは循環系の回路モデルの理想演算増幅器となる。このプレッシュアホロワは循環系の回路モデルに著者が与えた。プレッシュアホロワの出力端子からプレッシュアホロワに向かって血液が流入することはない。プレッシュアホロワの回路から出力端子に向かって血液が流出することもない。また、プレッシュアホロワの入力端子からプレッシュアホロワの回路に向かって血液が流入することはない。プレッ

シャホロワの回路からプレッサホロワの入力端子に向かって血液が流出することもない。

$$p_o(t) = p_i(t) \dots (3.5.1)$$

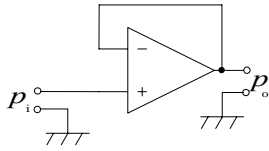


図 3.5.1 プレッサホロワの記号

3.6. 内圧制御内圧源

図 3.5.1 のプレッサホロワを時変型コンプライアンスに接続したものを内圧制御内圧源と呼ぶ。記号は図 3.6.1 になる。内圧制御内圧源は図 2.1 の心室部に接続している。図 3.6.1 では (3.6.1) が成立することは (3.1) のコンプライアンスと上述のプレッサホロワの定義からも明らかである。

$$c(t) \times p_o(t) = c(t) \times p_i(t) \dots (3.6.1)$$

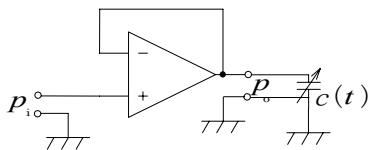


図 3.6.1 内圧制御内圧源の記号

3.7. インダクタンスの定義

文献 2 で、著者が独自に定義したインダクタンスを 3 章 7 節では説明する。図 2.1 の物理的モデルにはインダクタンスは使用していない。本節で説明するインダクタンスを使用することで、図 2.1 の物理的モデルよりも実際の心臓血管系に近い内圧および容積を心臓血管系の回路モデルに与えることを著者は考えている。本書の第 3 回で、そのようなインダクタンスについて説明をする。本節では、その説明の準備のために循環系の回路モデルの要素としてのインダクタンスの定義について説明する。

本書での循環系の回路モデルのインダクタンスの記号を図 3.7.1 で与える。7 節では、図 3.7.1 のひとつの端を P 点として、他方の端を Q 点とする。本書では図 3.7.1 をインダクタの記号とは呼ばないことにする。



図 3.7.1 インダクタンスの記号

循環系の回路モデルにインダクタンスと呼ぶ量 (3.7.1) を導入する。図 3.7.1 のインダクタンスに生じる血流量 (3.7.2) を仮定する。インダクタンス (3.7.1) および血流量 (3.7.2) を使用して、量 (3.7.3) を導入する。血流量 (3.7.2) に (3.7.4) を仮定する。量 (3.7.3) および血流量 (3.7.2) を使用して、(3.7.5) でインダクタンス (3.7.1) を定義する。

$$L(t) \cdots (3.7.1)$$

$$i(t) \cdots (3.7.2)$$

$$J(t) = L(t) \cdot i(t) \cdots (3.7.3)$$

$$i(t) \neq 0 \cdots (3.7.4)$$

$$L(t) \equiv \frac{J(t)}{i(t)} \frac{\text{mmHg} \cdot \text{s}^2}{\text{ml}}, (i(t) \neq 0) \cdots (3.7.5)$$

量 (3.7.3) を使用して, 図 3.7.1 の両端の圧力差を (3.7.6) で与える. 圧力差 (3.7.6) の左辺は (3.7.7) で記述することができる.

$$p(t) = \frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} \cdots (3.7.6)$$

$$p(t) = p_p(t) - p_q(t) \cdots (3.7.7)$$

(3.7.5) および (3.7.6) を使用すると, インダクタンス (3.7.1) を (3.7.8) で記述できる. インダクタンス (3.7.8) では, 図 3.7.1 のインダクタンスの両端での圧力差を使用して (3.7.1) を記述できる. ただし, (3.7.8) の右辺に記述した分子の第 2 項の定数を与える必要がある.

$$L(t) = \frac{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau + L(t_0) \cdot i(t_0)}{i(t)} \cdots (3.7.8)$$

本書の第 3 回では, 量 (3.7.3) を直接には使用しないで, 主に (3.7.6) および (3.7.8) で考察する. 循環系の回路モデルの資料として発行している文献 3 に, 電気回路論および電磁気学でのインダクタンスについて説明してある. (3.7.5) は, そのインダクタンスを参考にして著者が定義したものである.

4. あとがき

本講座の第 1 回では循環系の回路モデルの回路網とその回路要素の数学的モデルを紹介した. また, コンプライアンスでは分母が零になってしまう数学上の問題を説明した. この分母が零になってしまうことは (3.2.1) のコンプライアンスとの異なる部分としては重要であるものと著者は考える. 読者諸氏にもこのことを注意して頂きたい.

本講座の第 2 回では図 2.1 の物理的モデルを使用して線形時変システムを記述する. この線形時変システムの導出の際にプレッシャホロワの回路に血液が流入出しないことは重要な条件である. また, (3.2.1) のコンプライアンスを使用する際のととても重要な注意を与える. このことは, 電気量と電場の関係に依るコンプライアンスに関する循環系の回路モデルでの問題であるとも著者は考えている. この問題に関する 2007 年現在の一般的な循環系の回路モデル理論と著者が構築した本講座の理論との整合しない箇所について紹介する.

参考文献

- 1) [富岡和人, "AL COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006", 循環系に関する研究報告, \(2006-12-27\), pp.7-10, pp.58-65](#)
- 2) [富岡和人, "AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008", 循環系に関する研究報告, \(2008-12-25\), pp.6-7,](#)

[pp.8-10. pp.19-21.](#)

- 3) [富岡和人, “電位の簡単な入門 2007 第 5 回”, A LIFE COM.](#)
- 4) Vladimir A.Zorich, , Roger Cooke(Translator), 2004 : Mathematical Analysis I , Spronger, pp.178-181, pp.331-333, p.351, pp.359-362.

免責事項

A LIFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーが A LIFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他 A LIFE COM. の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任を負いません。

本資料は情報提供を目的として作成したものです。本資料の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.および A LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任を負いません。

著作権

Copyright © 2007–2009 富岡和人 All rights reserved.

文書のプロパティの文書に関する制限の概要の表示内容については著者の許可のないものとします。

本ドキュメントのバックアップのコピーは許可します。

本ドキュメントを私的利用の範囲内で印刷することは許可します。

作成日：2007 年 01 月 06 日
発行日：2007 年 01 月 07 日
改訂発行日：2007 年 01 月 10 日
改訂発行日：2009 年 01 月 09 日

電気の回路論の文献

[“電位の簡単な入門 2007 第 1 回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第 2 回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第 3 回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第 4 回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 Option”](#)

アインシュタインの特殊相対性理論の文献

[“特殊相対性理論の速度の変換”](#)

[“特殊相対性理論のエネルギーの変換と相対論的質量の変換”](#)

ホームページ

<http://www.alifecom.info/>

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/>

<http://book.geocities.jp/alifecominfo/>

<http://alifecominfo.aikotoba.jp/>